This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

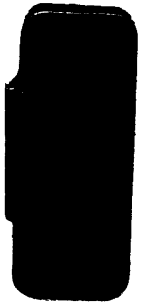
Über Google Buchsuche

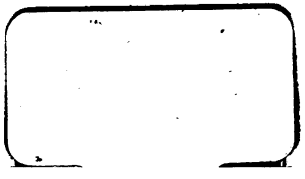
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

KF
26998
HN 4XPT 2

-70

KF-26998(1)





Georg Winkler s/m. l. Fachkollegen

Mr. Huntington

zur gefl. Erinnerung an die

Leipziger Tage.

1. Oktober 1899.

DIE GEOMETRIE DER LAGE.

DIE

GEOMETRIE DER LAGE.

VORTRÄGE

VON

DR. THEODOR REYE,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG.

ERSTE ABTHEILUNG.

MIT FÜNF LITHOGRAPHIRTEN FIGUREN-TAFELN.

ZWEITE VERMEHRTE AUFLAGE.

NEUE AUSGABE.

LEIPZIG, 1882.
BAUMGÄRTNERS BUCHHANDLUNG.

KF26998 (1)

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
MAY 12 1957

053*116

Vorwort zur ersten Abtheilung.

Die Vorträge über die Geometrie der Lage, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, sind in den letzten zwei Jahren allmälig niedergeschrieben worden; zu ihrer Herausgabe wurde ich durch ein Bedürfniss veranlasst, welches seit längerer Zeit am hiesigen Polytechnikum, und vielleicht schon in weiteren Kreisen sich fühlbar macht. Nämlich die wichtigen Constructions-Methoden, mit denen Herr Professor Culmann die Ingenieur-Wissenschaften bereichert hat, und welche in seinem Werke „die graphische Statik" veröffentlicht sind, gründen sich zum grossen Theile auf die neuere Geometrie, und die Kenntniss der letzteren ist daher den Ingenieurschülern unserer Anstalt unentbehrlich geworden. Durch vorliegende Arbeit nun versuche ich dem Mangel eines Lehrbuches abzuhelfen, welches den Studirenden in gedrängter Kürze den erforderlichen Stoff darbietet, und mich bei meinem mündlichen Unterricht unterstützt.

Selbstverständlich musste ich mich der von Herrn Culmann adoptirten Terminologie bedienen, und sogar bis zu einem gewissen Grade dem Lehrgange desjenigen gehaltvollen Werkes folgen, welchem dieselbe entnommen

ist, nämlich der „Geometrie der Lage“ des Herrn Professor von Staudt. Uebrigens sind die neuen Benennungen, welche Herr von Staudt den älteren Steiner'schen hinzugefügt hat, so glücklich gewählt, dass ich nur in einzelnen Fällen einen anderen Ausdruck vorgezogen hätte; z. B. dem Namen „gerades Gebilde“ den von Herrn Paulus eingeführten Namen „Punktreihe“. Und die Art, wie Herr von Staudt, im Gegensatz zu allen übrigen Autoren der neueren Geometrie, diese Wissenschaft begründet, scheint mir so bedeutende Vortheile zu gewähren, dass ich auch ohne anderweitige Veranlassung sie jeder andern vorziehen würde. Es sei mir gestattet, diese meine Ansicht durch wenige Worte zu motiviren.

Dem Ingenieur wie dem Mechaniker und Architekten kommt bei dem Entwerfen seiner Bauwerke die Fähigkeit wesentlich zu statten, sich dieselben zum Voraus räumlich vorzustellen. Soll z. B. eine Brücke über den Strom gespannt werden, so muss zunächst unter den verschiedenen Constructionsarten diejenige gewählt werden, welche den gegebenen Verhältnissen am besten entspricht. Der Ingenieur vergleicht zu dem Ende den langgestreckten Blechbalken mit dem kühn geschwungenen Bogen oder der frei schwebenden Kettenbrücke, sucht sich vorzustellen, wie die Lasten sich hierhin und dorthin bewegen und wie sie auf die Glieder des mächtigen Bauwerks sich vertheilen. Wieder und immer wieder prüft und vergleicht er, denkt sich mehr und mehr in alle Einzelnheiten hinein, bis der ganze Bau in klaren Zügen fertig vor seinem geistigen Auge steht. Und jetzt beginnt der zweite Theil der schöpferischen Arbeit: das Project wird dem Papiere anvertraut, die sämmtlichen Details nach Form und Stärke genau bestimmt. Aber auch jetzt noch muss der Ingenieur und

Jeder, der sich mit seinen Ideen vertraut machen will, fortwährend die Vorstellungskraft anspannen, um Dasjenige wirklich zu schauen, was durch die Linien einer dem Laien unverständlichen Zeichnung dargestellt werden soll. — Wie der Techniker, so muss auch der Mathematiker und überhaupt Jeder, der sich mit den Naturwissenschaften beschäftigt, das Vorstellungsvermögen vielfach in Anspruch nehmen; bald soll er complicirte Apparate aus einer dürftigen Skizze begreifen, bald weitläufige Naturprocesse oder verwickelte Bewegungen nach einer blossen Beschreibung sich deutlich machen.

Eine Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts scheint mir nun die zu sein, das Vorstellungsvermögen des Lernenden zu üben und auszubilden; und ich glaube, dass diese Aufgabe am besten auf dem Wege gelöst wird, den Herr von Staudt eingeschlagen hat. Er schliesst nämlich alle mehr oder minder complicirten Rechnungen aus, welche die Vorstellungskraft nicht beanspruchen, zu deren Verständniss vielmehr eine gewisse mechanische Fertigkeit erforderlich ist, die mit der Geometrie an sich wenig zu schaffen hat. Dafür aber gelangt Herr von Staudt durch directe Anschauung zur Erkenntniss der geometrischen Wahrheiten, auf welche er die Geometrie der Lage gründet. Es lässt sich nicht leugnen, dass diese Methode, wie jede andere, ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten bietet; und das Staudtsche Werk, welches offenbar nicht für Anfänger geschrieben ist, besitzt ausserdem noch mehrere, an sich rühmenswerthe Eigenschaften, welche das Studium desselben wesentlich erschweren. Es zeichnet sich namentlich aus durch eine merkwürdige Knappheit des Ausdrucks und eine sehr gedrängte, beinahe wortkarge Darstellung; nur das Nothwendige wird gesagt, selten ein erläuterndes Wort hinzugefügt, und dem Leser bleibt es

überlassen, zu den in ihrer ganzen Allgemeinheit aufgestellten Sätzen sich leichter fassliche Beispiele selbst zu bilden. Der Stoff ist sehr schön und systematisch geordnet; z. B. die Lehren von der Projectivität, von der collinearen und reciproken Verwandtschaft, von den involutorischen Gebilden werden vollständig abgehandelt, ehe zur Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung geschritten wird, und Herr v. Staudt erlangt so den Vortheil, die Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung mit einem Schlage beweisen zu können, während freilich andererseits die Darstellung so abstract wird, dass die Kräfte eines Anfängers bei ihrem Studium gewöhnlich schnell erlahmen. Diese Eigenschaften, welche der wohlverdienten Verbreitung und allgemeinen Anerkennung des Staudt'schen Werkes leider sehr hinderlich gewesen zu sein scheinen, stempeln dasselbe zu einem vorzüglichen Handbuch der neueren Geometrie, auf welches man sich, ähnlich wie in der Geometrie der Alten auf den Euklid, sehr bequem beziehen kann; in meinen für Anfänger geschriebenen Vorträgen musste ich sie vermeiden, um nicht unverständlich zu werden.

Eine andere, dem Lehrgange selbst eigenthümliche Schwierigkeit habe ich absichtlich nicht vermieden, weil sie von Jedem früher oder später überwunden werden muss, welcher die Eigenschaften räumlicher Gebilde begreifen will. Ich meine die schon erwähnte Schwierigkeit, solche Gebilde sich räumlich vorzustellen, eine Schwierigkeit, mit welcher der Anfänger auch bei dem Studium der darstellenden Geometrie und der analytischen Geometrie des Raumes zu kämpfen hat, und deren Ueberwindung ich, wie oben bemerkt, für eine Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts halte. Um dem Leser die Erreichung dieses Zieles zu erleichtern, habe ich meinen Vorträgen Figurentafeln hinzugefügt. Herr von Staudt

hat dieses Hülfsmittel nicht benutzt, indem er wohl von ähnlichen Ansichten geleitet sein mag, wie die von Steiner gelegentlich ausgesprochene: „dass stereometrische Betrachtungen nur dann richtig aufgefasst seien, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden". Allein durch Verschmähung dieser Versinnlichungsmittel, die bei planimetrischen Betrachtungen auch nicht so leicht zu einer unrichtigen Auffassung verleiten, würde ich den Studirenden das Verständniss meiner Vorträge unnöthig erschwert haben.

Indem der von Herrn von Staudt zuerst eingeschlagene Lehrgang die Rechnungen ausschliesst und alle auf Maassverhältnissen beruhenden Eigenschaften der geometrischen Gebilde gesondert untersucht, bietet er noch einen Vortheil, den ich sehr hoch anschlagen möchte. Er bringt nämlich das wichtige, so ungemein fruchtbare Gesetz der Dualität oder Reciprocität, von welchem die ganze Geometrie der Lage beherrscht wird, in seiner vollen Reinheit und in seinem ganzen Umfange zur schönsten Geltung. Kein anderer Lehrgang, der das Maass zu Hülfe nimmt, kann sich dieses Vorzuges rühmen, und zwar einfach deshalb, weil in der Geometrie des Maasses jenes Gesetz nicht allgemein gültig ist. Anerkanntermaassen aber bietet die Geometrie Nichts, was für den Anfänger so anregend wäre, ihn so zum Selbstschaffen anspornte, wie das Gesetz der Reciprocität; und je früher er damit bekannt gemacht wird, desto besser. Dass dieses Gesetz besonders in der Geometrie des Raumes so klar hervortritt, war für mich ein maassgebender Grund dafür, die stereometrischen Betrachtungen von den planimetrischen nicht zu trennen. — Die metrischen Relationen, namentlich diejenigen der Kegelschnitte, habe ich übrigens durchaus nicht vernachlässigt, sondern

in weiterem Umfange, als dieses von Steiner und Herrn von Staudt geschieht, überall dort entwickelt, wo sie sich als besondere Fälle der allgemeinen Sätze von selbst darboten.

Zu den Kegelschnitten und den übrigen Gebilden zweiter Ordnung, von denen diese erste Abtheilung meiner Vorträge vornehmlich handelt, gelange ich auf einem anderen Wege als Steiner und Herr von Staudt, welcher letztere die Theorie jener Gebilde auf die Lehre von der Collineation und der Reciprocität gründet. Ich hoffe dadurch, dass ich die Gebilde zweiter Ordnung gleich bei der Untersuchung der projectivischen einförmigen Grundgebilde einführe, das Verständniss der projectivischen Verwandtschaft erleichtert zu haben; zugleich gewinne ich dadurch den Vortheil, den Anfänger auf das schwierigere Studium der Collineation und der Reciprocität allmälig vorbereiten zu können. Steiner hat in seinem höchst anregenden, bahnbrechenden Werke „Systematische Entwickelung etc." die Hülfsmittel geschaffen, deren ich mich vom fünften bis zum zehnten Vortrage vorzugsweise bediene; doch musste ich aus schon berührten Gründen darauf verzichten, gleich Steiner die Kegelschnitte mittelst des Kreises zu definiren.

Die zweite und letzte Abtheilung dieser Vorträge wird hoffentlich noch in diesem Jahre erscheinen; dieselbe wird namentlich die Lehre von der collinearen und der reciproken Verwandtschaft, sowie die Theorie der Flächen zweiter Ordnung enthalten. Ich beabsichtige, derselben eine kleine Sammlung von Constructions-Aufgaben beizugeben, damit durch deren Auflösung der Leser sich einige Uebung in der Anwendung der vorgetragenen Lehren erwerben könne. Solche Uebungen scheinen mir in der neueren Geometrie nicht minder nothwendig zu sein, als in der Geometrie der Alten, und ich habe stets

meinen Zuhörern neben dem mündlichen Unterricht auch Anleitung gegeben zur Ausführung derartiger Constructionen.

Die Pflicht der Dankbarkeit veranlasst mich, hier diejenigen Originalwerke zu nennen, deren Kenntniss mir bei der Ausarbeitung meiner Vorträge von Nutzen gewesen ist, und es würde mir eine besondere Genugthuung gewähren, wenn mein Buch zum Studium dieser Werke auch seinerseits anregte. Es sind die folgenden:

von Staudt, Geometrie der Lage. Nürnberg 1847.

von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856 bis 1860.

Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832.

Moebius, Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827.

Poncelet, Traité des Propriétés projectives des Figures. Paris 1822 und 1865.

Chasles, Traité des Sections coniques. Paris 1865.

Seydewitz, Abhandlungen in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik. Bd. 1 bis 17.

Das Hauptwerk des Herrn Chasles, „Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852", ist ohne besonderen Einfluss auf meine Vorträge geblieben, da es freilich den gleichen Stoff aber in durchaus anderer Weise behandelt. Dasselbe gilt von den einschlagenden analytisch-geometrischen Arbeiten der Herren Plücker, Hesse, Salmon, Cremona u. A., deren Studium übrigens durch die Kenntniss der Geometrie der Lage in vieler Hinsicht erleichtert wird. Das treffliche Werk von Moebius beruht freilich auch auf ganz anderen Methoden; dennoch aber musste ich desselben dankend erwähnen, weil ich ihm für vielfache Anregung mich verpflichtet fühle.

Dem Herrn Verleger spreche ich zum Schlusse meinen Dank aus für die Bereitwilligkeit, mit welcher er allen meinen Wünschen in Bezug auf die Ausstattung meines Buches entgegengekommen ist.

Zürich, den 8. März 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage der ersten Abtheilung.

Von den zahlreichen Aenderungen und Erweiterungen dieser neuen Auflage, welche die erste um ihre halbe Bogenzahl an Umfang übertrifft, hebe ich die folgenden besonders hervor.

Der von Staudt'sche Beweis des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage (Seite 45) wurde mit Rücksicht auf die berechtigten Einwendungen, welche Herr F. Klein gegen ihn erhoben hat, durch einen von Herrn Thomae herrührenden Beweis ersetzt. Um den Zusammenhang mit der analytischen Geometrie herzustellen, wurden in dem Abschnitte über die Durchmesser und Axen der Curven zweiter Ordnung auch die Gleichungen dieser Curven abgeleitet. In den Vortrag über die Aufgaben zweiten Grades habe ich die Anfangsgründe der geometrischen Theorie des Imaginären eingeflochten. Ein besonderer Vortrag über die Hauptaxen, Focalaxen und cyclischen Ebenen der Kegelflächen zweiter Ordnung wurde dem Buche einverleibt.

Die bedeutendste Aenderung aber ist die Hinzufügung einer Sammlung von 213 Aufgaben und Lehrsätzen. Ein Theil dieser Sammlung findet sich schon im Anhange der zweiten Abtheilung, ist aber nunmehr durch zahlreiche neue Aufgaben und nützliche Sätze bedeutend vergrössert worden. Die eilf Abschnitte dieses Theiles entsprechen, mit Ausnahme der beiden über das Princip der

reciproken Radien und über die geradlinigen Flächen dritter Ordnung, den mit ihnen gleichnamigen Vorträgen, und ihre Aufgaben und verhältnissmässig leicht zu beweisenden Sätze sind hauptsächlich zur Uebung für Studirende bestimmt. Jedem Anfänger rathe ich dringend, die Constructions-Aufgaben wirklich auszuführen, weil das Verständniss der Geometrie der Lage durch das Zeichnen wesentlich gefördert wird.

Die letzten vier Abschnitte der „Aufgaben und Lehrsätze" enthalten neue Untersuchungen, welche der ersten Auflage fremd geblieben und in mehreren wesentlichen Punkten hier meines Wissens zuerst mit den Hülfsmitteln der synthetischen Geometrie durchgeführt sind. Damit diese Untersuchungen über Polvierecke und Polvierseite und über lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten nicht zu umfangreich würden, habe ich für sie eine möglichst knappe Form der Darstellung gewählt. Dadurch und durch Einführung einiger einfacher Begriffe ist es mir gelungen, die wichtigen Theorien der Büschel, Schaaren, Netze und Schaarschaaren von Kegelschnitten in einem neuen Zusammenhange auf dem engen Raume von siebenzehn Seiten darzustellen. Durch den Satz des Herrn Stephen Smith, dessen synthetischer Beweis mir erst nach manchen vergeblichen Versuchen gelang, und durch das Gesetz der Reciprocität gestalten sich diese Theorien merkwürdig einfach und übersichtlich.

Strassburg i. E., den 30. November 1876.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

Seite

Einleitung 1

Erster Vortrag: Das Projiciren aus Punkten und Geraden; das Schneiden durch Ebenen und Gerade. Die sechs Grundgebilde der neueren Geometrie 7

Zweiter Vortrag: Unendlich ferne Elemente. Das Beziehen der Grundgebilde auf einander 14

Dritter Vortrag: Das Gesetz der Reciprocität oder Dualität. Einfache und vollständige *n* ecke, *n* seite, *n* kante u. s. w. 21

Vierter Vortrag: Das Beziehen vollständiger *n* ecke, *n* seite und *n* kante auf einander. Harmonische Gebilde 29

Fünfter Vortrag: Projectivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Grundgebilden 41

Sechster Vortrag: Curven, Büschel und Kegelflächen zweiter Ordnung. 54

Siebenter Vortrag: Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon 64

Achter Vortrag: Pol und Polare in Bezug auf Curven zweiter Ordnung 76

Neunter Vortrag: Durchmesser und Axen der Curven zweiter Ordnung. Gleichungen derselben 87

Zehnter Vortrag: Regelschaaren und Regelflächen 96

Eilfter Vortrag: Projectivische Verwandtschaft von Elementargebilden 102

Zwölfter Vortrag: Involutorische Elementargebilde 116

Dreizehnter Vortrag: Metrische Relationen involutorischer Gebilde. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung 127

Vierzehnter Vortrag: Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Elemente . . 138

Fünfzehnter Vortrag: Hauptaxen und Symmetrie-Ebenen, Focalaxen und cyclische Ebenen einer Kegelfläche zweiter Ordnung 151

Constructions-Aufgaben und Lehrsätze 161

Harmonische Gebilde 161. Projectivische Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde 161—163. Curven, Büschel und Kegelflächen zweiter Ordnung 163—167. Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung 167—170. Das Princip der reciproken Radien 170—177. Regelschaaren und Regelflächen 177—178. Projectivische Elementar-

gebilde; geradlinige Flächen dritter Ordnung 178—181. Involutorische Elementargebilde 182—185. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung 185—188. Aufgaben zweiten Grades 188—189. Focalaxen und cyclische Ebenen von Kegelflächen zweiter Ordnung 189—191. Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten 191—193. Lineare Systeme und -Gewebe von Kegelschnitten 194—198. Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter und erster Stufe 198—207. Das Kegelschnittnetz und die Schaarschaar 208—215.

Einleitung.

Die Mehrzahl von Ihnen, meine Herren, wird bis jetzt von der Geometrie der Lage kaum mehr als den Namen gehört haben. Denn leider ist die Kenntniss dieser bedeutsamen, durch Fülle des Inhalts, Schönheit der Form und Einfachheit der Entwickelungen ausgezeichneten Schöpfung der neuesten Zeit noch sehr wenig verbreitet; und obgleich die neuere Geometrie zu den anregendsten Zweigen der mathematischen Wissenschaften zu rechnen ist, und viele schöne Anwendungen auf die technischen und die Naturwissenschaften zulässt, so ist es ihr doch noch nicht gelungen, in den Schulen allgemein Eingang zu finden. Vielleicht ist es deshalb nicht ohne Nutzen, wenn ich meinen Vorträgen einige Worte über die Stellung voranschicke, welche die Geometrie der Lage den sonstigen Zweigen der Geometrie gegenüber einnimmt, und wenn ich Ihnen hernach einige Sätze und Aufgaben aus der Geometrie der Lage nenne, welche geeignet sind, Ihnen diese Wissenschaft zu kennzeichnen.

Von der Geometrie der Alten und der analytischen Geometrie unterscheidet sich die reine Geometrie der Lage wesentlich dadurch, dass sie von dem Begriff des Maasses keinen Gebrauch macht. Im Gegensatz zu ihr wird daher die ältere Geometrie auch wohl „Geometrie des Maasses“ genannt. In der reinen Geometrie der Lage ist z. B. von Halbirungen geradliniger Strecken, von rechten Winkeln und Perpendikeln, von Verhältnissen und Proportionen, von Inhaltsberechnungen nicht die Rede; eben so wenig von trigonometrischen Zahlen, oder gar von analytischen Gleichungen krummer Linien. Denn alle diese Gegenstände der älteren Geometrie setzen Messungen voraus. Nur am Schlusse jedes grösseren Abschnittes denke ich als Anhang einige Anwendungen der Geometrie der Lage auf die Geometrie des Maasses zu geben, in denen ich die Planimetrie, sowie gelegentlich einmal

den Begriff des Sinus als bekannt voraussetzen werde. Mit gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecken werden wir uns so wenig beschäftigen, wie mit rechtwinkligen; und auch das Rechteck, die regelmässigen Polygone und der Kreis bleiben von unserer Untersuchung, abgesehen vom Anhange, ausgeschlossen. Nur anhangsweise werden wir vom Mittelpunkt, von den Axen und Brennpunkten der sogenannten Curven II. Ordnung oder Kegelschnitte reden, dagegen aber viel allgemeinere und wichtigere Eigenschaften dieser Linien kennen lernen, als diejenigen, auf welche die meisten Lehrbücher der analytischen Geometrie sich beschränken. Wir werden uns sogar einen neuen Weg zu den Kegelschnitten bahnen müssen, weil wir der Hülfe des Kreiskegels, mittelst dessen die Alten, oder der Gleichungen, durch welche die Jünger des Descartes sie definiren, in der Geometrie der Lage entbehren. Dass in meinen Vorträgen keine Rechnungen vorkommen werden, brauche ich nach dem schon Gesagten wohl kaum zu erwähnen; nur in den Anwendungen auf die Geometrie des Maasses werden wir bisweilen vom Gleichheitszeichen Gebrauch machen.

Von den geometrischen Kenntnissen, welche in den Schulen gelehrt werden, benutze ich deshalb nur sehr wenige. Dagegen würde Ihnen eine gewisse Uebung in der Fähigkeit, sich geometrische Gebilde auch ohne bildliche Darstellung zur Anschauung zu bringen, von grossem Nutzen sein. Denn es ist mir nicht wohl möglich, jeden Satz, namentlich wenn ein solcher sich auf Gebilde im Raume bezieht, durch eine Skizze zu erläutern; ich muss Ihrer Vorstellungskraft manchmal Etwas zumuthen. Da diese auch in der darstellenden oder descriptiven Geometrie vielfach in Anspruch genommen wird, so wird Ihnen die Kenntniss der letzteren sehr zu Statten kommen; wie auch umgekehrt die Geometrie der Lage ein vorzügliches Vorstudium bildet für die darstellende Geometrie. Ueberhaupt ist von allen übrigen Zweigen der Geometrie die darstellende am meisten geeignet, das Studium der Geometrie der Lage zu erleichtern, schon weil sie der letzteren sehr nahe verwandt ist. Denn auch in der darstellenden Geometrie kommen weniger Grössenbeziehungen in Betracht, als vielmehr die Lage der Gebilde theils zu einander, theils zu den Projectionsebenen, wobei denn freilich die Benutzung des Kreises und des rechten Winkels nicht verschmäht wird. Vor Allem werden Sie finden, dass die Perspective oder die centrale Projection auch in der Geometrie der Lage eine

grosse Rolle spielt, und dass viele in letzterer benutzte Ausdrücke von jener herrühren.

Zu der analytischen Geometrie steht die neuere Geometrie in einem gewissen Gegensatze schon durch ihre Methode, welche die aus der Geometrie der Alten Ihnen bekannte synthetische ist. Wir werden von einer kleinen Zahl von „Grundgebilden“ ausgehen; die einfachen Beziehungen, welche zwischen diesen sich aufstellen lassen, führen uns dann zu den sogenannten Gebilden zweiter Ordnung, zu denen auch die Kegelschnitte gehören, und lassen zugleich die Haupteigenschaften dieser Gebilde leicht erkennen. Von den Gebilden zweiter Ordnung können wir sodann in derselben Weise zu immer neuen Gebilden fortschreiten. Auf die Analysis, dieses mächtige Werkzeug der modernen Mathematik, müssen wir bei unseren Untersuchungen schon deshalb verzichten, weil wir das Maass nicht benutzen; denn um mit räumlichen Gebilden rechnen zu können, müssen wir sie zuerst durch Zahlen ausdrücken, d. h. ausmessen. Die neuere Geometrie wird wegen der in ihr angewendeten Methode vielfach im Gegensatz zu der analytischen mit dem Namen „synthetische Geometrie“ bezeichnet.

Eben weil wir in der reinen Geometrie der Lage von Maassverhältnissen absehen, sind ihre Sätze und Aufgaben sehr allgemein und umfassend. Z. B. gerade die wichtigsten von denjenigen Eigenschaften der Kegelschnitte, welche in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie bewiesen werden, sind ganz specielle Fälle von Sätzen, welche wir später kennen lernen werden. Einige Beispiele mögen dazu dienen, Ihnen auch in dieser Hinsicht den Stoff näher zu charakterisiren, mit welchem wir uns in diesen Vorträgen beschäftigen werden.

Bei dem Entwerfen von Bauwerken und überhaupt bei dem Zeichnen ist nicht selten die Aufgabe zu lösen: „Durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei (convergirenden) Geraden eine dritte Gerade zu ziehen.“ Die Geometrie des Maasses liefert uns beliebig viele Punkte einer solchen dritten Geraden z. B. mit Hülfe des Satzes, dass auf parallelen Geraden durch irgend drei Transversalen, die sich in einem Punkte schneiden, proportionale Abschnitte gebildet werden. Die Geometrie der Lage giebt uns eine einfachere Lösung an die Hand. Wir nehmen nämlich ausserhalb der beiden gegebenen Geraden a und b (Fig. 1) irgend einen Punkt P an, und legen durch diesen beliebig viele Transversalen. Suchen wir dann in jedem Viereck, welches irgend zwei

dieser Transversalen mit a und b bilden, den Schnittpunkt der Diagonalen, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von a und b hindurchgeht.*) Der Beweis folgt mit Leichtigkeit aus dem wichtigen Satz über die harmonische Theilung am Viereck, welcher folgendermaassen ausgesprochen werden kann. Nimmt man (Fig. 2) auf einer Geraden drei Punkte A, B, C an, und construirt irgend ein Viereck so, dass zwei Gegenseiten durch A, eine Diagonale durch B und die beiden anderen Gegenseiten durch C gehen, so trifft die zweite Diagonale jene Gerade $\overline{ABC}$ in einem ganz bestimmten vierten Punkte D. Sie können durch Construction verschiedener, den ersten Bedingungen genügender Vierecke leicht eine Bestätigung dafür erhalten, dass wirklich alle zweiten Diagonalen derselben durch jenen vierten Punkt D gehen. Die Punkte A, B, C, D werden vier harmonische Punkte genannt, so dass D von B harmonisch getrennt ist durch die Punkte A und C. In der Feldmesskunst kann jener Satz unter Umständen dazu benutzt werden, eine gerade Linie über ein Hinderniss, z. B. einen Wald, hinaus zu verlängern durch Umgehung desselben.

Von Sätzen über das Dreieck will ich nur den folgenden nennen: Liegen zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ so, dass (Fig. 3) die Verbindungslinien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ gleichnamiger Eckpunkte sich in einem und demselben Punkte S schneiden, so begegnen sich die gleichnamigen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}$ und $\overline{B_1C_1}$, $\overline{CA}$ und $\overline{C_1A_1}$ in drei Punkten $C_2A_2B_2$, welche auf einer Geraden u liegen; und umgekehrt. Die den Satz erläuternde Figur verdient Beachtung als Repräsentant einer Gattung von merkwürdigen, durch eine gewisse Regelmässigkeit ausgezeichneten Configurationen. Sie besteht aus 10 Punkten und 10 Geraden; auf jeder der letzteren liegen drei von den 10 Punkten, und durch jeden von diesen gehen drei von den 10 Geraden.

Eine andere Reihe von Sätzen knüpft sich an die Curven zweiter Ordnung oder Kegelschnitte. Aus der analytischen Geometrie ist Ihnen bekannt, und es wird Ihnen später wiederum be-

*) Anfängern empfehle ich sehr, zu diesem Satze und namentlich zu späteren minder einfachen Sätzen die Figur nach den Angaben des Textes selbst zu zeichnen, ohne die von mir gezeichnete vorher anzusehen. Eine allmählig entstehende Figur ist weit leichter aufzufassen, und erläutert auch meistens den darzustellenden Satz weit besser, als eine mit allen Hülfslinien fertig gezeichnete.

wiesen werden, dass eine Curve II. Ordnung durch fünf Punkte oder fünf Tangenten völlig bestimmt ist. Aber Sie kennen auch die Weitläufigkeit, welche die wirkliche Berechnung und Construction eines so bestimmten Kegelschnittes bietet. Die Geometrie der Lage beweist nun zwei sehr wichtige Sätze über die Curven II. Ordnung, die es uns ermöglichen, zu fünf gegebenen Punkten oder Tangenten einer solchen Curve beliebig viele neue Punkte resp. Tangenten mit Leichtigkeit zu construiren und so die Curve selbst schnell zu zeichnen. Wer von Ihnen diese Sätze bereits kennt, wird zugleich wissen, wie viele Hülfsmittel ihr Beweis in der analytischen Geometrie fordert. Der erste, von Pascal zuerst aufgestellte Satz sagt aus, dass die drei Paar Gegenseiten jedes einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Sechsecks sich in drei Punkten schneiden, welche auf einer Geraden liegen; der zweite, von Brianchon herrührende giebt an, dass von einem umschriebenen Sechseck die drei Hauptdiagonalen, durch welche je zwei gegenüberliegende Eckpunkte verbunden werden, sich in einem und demselben Punkte schneiden. Beide Sätze lassen sich leicht am Kreise prüfen. Sie bemerken, dass in denselben von Grössenverhältnissen des Kegelschnittes, dass von seinem Mittelpunkte, seinen Axen und Brennpunkten nicht die Rede ist. Eben darum aber sind diese Sätze von der grössten Allgemeinheit und Bedeutung, so dass die ganze Theorie der Kegelschnitte auf sie gegründet werden kann. Namentlich lässt sich das wichtige Problem der Tangentenziehung an einem gegebenen Punkt mittelst des Pascal'schen Satzes lösen, selbst wenn der Kegelschnitt nur durch fünf Punkte gegeben ist, ohne vollständig gezeichnet vorzuliegen.

Das Problem der Tangentenziehung an Curven II. Ordnung kann in vielen Fällen mit Hülfe eines Satzes gelöst werden, welcher eine der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte aussagt, dennoch aber in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie häufig sich nicht findet, weil sein analytischer Beweis ziemlich verwickelt und wenig geeignet ist, jene Eigenschaft in das rechte Licht zu setzen. Nämlich wenn durch einen Punkt A (Fig. 4), welcher in der Ebene einer Curve II. Ordnung, jedoch nicht auf der Curve liegt, Secanten an diese gezogen werden, so bestimmen beliebige zwei solche Secanten vier Punkte, wie K, L, M, N auf der Curve. Je zwei von den Secanten verschiedene Verbindungslinien dieser vier Punkte, etwa $\overline{LM}$ und $\overline{NK}$ oder $\overline{KM}$ und

$\overline{LN}$, schneiden sich dann in einem Punkte einer bestimmten Geraden a, welche die Polare des gegebenen Punktes A genannt wird. Liegt der Punkt A ausserhalb der Curve, so schneidet seine Polare a die letztere in den Berührungspunkten der beiden Tangenten, welche von A an die Curve gelegt werden können; liegt A innerhalb der Curve, so wird diese von a nicht geschnitten. Sie können diesen Satz benutzen, um durch einen gegebenen Punkt mit alleiniger Anwendung des Lineales Tangenten an einen Kegelschnitt zu ziehen. Auf jeder durch A gelegten Secante liegen noch vier bemerkenswerthe Punkte: nämlich A selbst, sodann der erste Schnittpunkt B mit der Curve, hierauf folgt der Schnittpunkt C mit der Polare a von A und endlich der zweite Schnittpunkt D mit der Curve. Diese vier Punkte A, B, C, D sind vier harmonische Punkte, und die Polare a enthält also jeden Punkt, welcher durch zwei Curvenpunkte harmonisch von A getrennt ist. Die wichtigen Sätze über Mittelpunkt und conjugirte Durchmesser von Kegelschnitten sind ganz specielle Fälle von den eben genannten Sätzen. Diese letzteren lassen sich mit Leichtigkeit ausdehnen auf die Flächen zweiter Ordnung, weil diese mit einer sie schneidenden Ebene im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung gemein haben.

Aus diesen wenigen Beispielen, die ich noch beliebig vermehren könnte, werden Sie schon erkannt haben, mit welchen ganz anderen, aber gewiss nicht weniger wichtigen Sätzen die Geometrie der Lage sich beschäftigt, als z. B. die analytische Geometrie. Ich erinnere Sie noch daran, dass die letztere besonders durch die Winkel, welche die Tangenten der Kegelschnitte mit den Brennstrahlen bilden, oder durch die Abschnitte, welche sie auf den Axen hervorrufen, die Lage der Tangenten zu bestimmen sucht, also Alles auf Maassverhältnisse zurückführt. Natürlich rede ich hier nur von den Elementen der analytischen Geometrie, auf welche die meisten Lehrbücher sich beschränken, nicht aber von den höchst fruchtbaren neueren Methoden, deren Dasein vor Allen dem scharfsinnigen Plücker zu danken ist.

Erster Vortrag.

Das Projiciren aus Punkten und Geraden; das Schneiden durch Ebenen und Gerade. Die sechs Grundgebilde der neueren Geometrie.

Sie wissen, dass die vielen Begriffe, welche in der Geometrie der Alten, der Trigonometrie und der analytischen Geometrie aufgestellt werden, zum grössten Theil auf das Maass sich gründen und somit in der reinen Geometrie der Lage nicht Anwendung finden können. Es wird Sie deshalb nicht überraschen, dass die neuere Geometrie für ihre Zwecke gleichfalls eine beträchtliche Anzahl eigenthümlicher Begriffe aufgestellt hat, mit denen ich Sie in diesem und den nächsten Vorträgen bekannt zu machen denke, und die wir fortwährend anwenden müssen.

Der Punkt, die Gerade und die Ebene sind die einfachen „Elemente" der neueren Geometrie. Ich werde in der Regel die Punkte durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnen, gerade Linien durch kleine lateinische, und Ebenen durch griechische Buchstaben. Die Geraden, welche wir häufig auch „Strahlen" nennen werden, und die Ebenen betrachten wir immer als allseitig unbegrenzt, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird. Wir können diese Elemente mit einander zu zusammengesetzten Gebilden verbinden, indem wir eines derselben als „Träger" eines Complexes der anderen ansehen. Wir gelangen so zu den sogenannten Grundgebilden der neueren Geometrie. Bevor ich Ihnen diese erkläre, schicke ich folgende vorbereitende Betrachtung voraus.

Wenn Sie einen Gegenstand, etwa ein Gebäude, anschauen, so wirft jeder (sichtbare) Punkt desselben einen Strahl in Ihr Auge, welcher der „Schein" oder auch der „Projectionsstrahl" jenes Punktes genannt wird. Der Schein des ganzen Gebäudes

ist also aus vielen Strahlen zusammengesetzt, von denen jeder einen oder mehrere Punkte vom Auge aus „projicirt“. Liegt eine Anzahl von Punkten in einer nicht durch das Auge gehenden Geraden, so liegen alle ihre Projectionsstrahlen in derjenigen Ebene, welche vom Auge aus durch diese Gerade gelegt werden kann; oder jede solche Gerade wird aus dem Auge durch eine Ebene projicirt, welche auch der „Schein“ oder die „projicirende Ebene“ jener Geraden genannt wird. Ebenso wird im Allgemeinen eine Curve durch eine conische Fläche projicirt. Den Schein des Gebäudes können wir nun durch eine Ebene auffangen oder „schneiden“, indem wir jeden Projectionsstrahl in einem Punkte und jede projicirende Ebene in einer Geraden schneiden. Wir erhalten dann in der Ebene als „Schnitt“ oder „Spur“ jenes Scheines ein perspectivisches Bild, eine „Projection“ des Gebäudes, und diese Projection sendet offenbar ganz denselben Schein in das Auge, wie das Gebäude selbst, und ist deshalb auch sehr geeignet, uns eine Vorstellung von letzterem zu verschaffen. Sie sehen solche perspectivische ebene Bilder von räumlichen Gegenständen täglich in den Schaufenstern der Photographen.

Den Meisten von Ihnen wird diese Art des Projicirens unter dem Namen „Centralprojection“ wohl längst bekannt sein. Auf sie gründet sich die Lehre von der Perspective; und alle anderen Arten des Projicirens, die in der darstellenden Geometrie üblich sind, lassen sich als besondere Fälle dieser einen Art auffassen. Damit z. B., wie in der orthogonalen Projection, die Projectionsstrahlen parallel seien, brauchen wir uns nur das Auge in unendliche Entfernung gerückt zu denken. Auch die Schatten, welche Gegenstände auf Ebenen werfen, wenn sie aus einem endlichen oder unendlich fernen Punkt beleuchtet werden, sind offenbar Nichts weiter, als Projectionen jener Gegenstände, indem nur an die Stelle des Auges der leuchtende Punkt getreten ist.

Wir wollen nun, abgesehen von allen optischen Beziehungen, die soeben benutzten Ausdrücke „Schein, Strahl, projiciren, schneiden“ u. s. w. auch ferner anwenden, indem wir statt des Auges einen beliebigen Punkt S und statt des bestimmten Gegenstandes oder Gebäudes ein beliebiges System Q von Punkten und Geraden im Raume annehmen. Dieses System Q wird also aus S durch ein System von Strahlen und Ebenen projicirt, nämlich jeder Punkt durch einen Strahl und jede nicht durch S gehende

Gerade durch eine Ebene. Der Punkt S ist dann als „Träger" aller dieser Strahlen und Ebenen anzusehen, welche zusammen den „Schein" des Systems Q bilden. Nehmen wir im Raum ein beliebiges System Σ von Ebenen und Geraden an, so wird jede neue Ebene ε dasselbe in einem System von Geraden und Punkten „schneiden", nämlich im Allgemeinen jede Ebene in einer Geraden, und jede Gerade in einem Punkte. Die Ebene ε erscheint dann als „Träger" aller dieser Geraden und Punkte, welche zusammen den „Schnitt" (die „Spur") des Systems Σ ausmachen.

Wir können auch aus Geraden projiciren, und durch Gerade Schnitte hervorrufen. Jeder ausserhalb einer Geraden g gelegene Punkt bestimmt nämlich mit g eine Ebene, oder wird aus g durch eine Ebene „projicirt" und ebenso wird jede Ebene, die nicht durch g geht, von dieser Geraden in einem Punkte „geschnitten". Die Gerade erscheint hiernach bald als Träger von Ebenen, welche in ihr sich schneiden, bald als Träger von Punkten, welche auf ihr liegen.

Durch solche Betrachtungen gelangen wir zu den folgenden sogenannten Grundgebilden, die in der neueren Geometrie eine wichtige Stelle einnehmen.

Die Gesammtheit aller in einer Geraden liegenden Punkte wird eine „Punktreihe" (auch wohl ein „gerades Gebilde") genannt; die einzelnen Punkte der Geraden heissen „Elemente" der Punktreihe. Diese Punkte denken wir uns starr mit einander verbunden, so dass ihre gegenseitige Lage auch dann noch unverändert bleibt, wenn die Gerade, ihr Träger, verschoben wird. Ein von zwei Punkten begrenzter Theil einer Punktreihe heisst eine „Strecke".

Die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden und in einer und derselben Ebene liegenden Strahlen soll ein „Strahlenbüschel" heissen. Der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Strahlen heisst der „Mittelpunkt" des Büschels; die einzelnen, nach beiden Seiten unbegrenzten Strahlen sind die „Elemente" desselben. Auch hier denken wir uns diese Elemente starr mit einander verbunden. Als „Träger" des Strahlenbüschels kann nach Belieben der Mittelpunkt oder auch die Ebene betrachtet werden, in welcher die Strahlen liegen. Ein von zwei Strahlen als „Schenkeln" begrenzter Theil eines Strahlenbüschels heisst ein „vollkommener ebener Winkel". Derselbe besteht aus zwei „einfachen" ebenen Winkeln, die Scheitelwinkel zu einander sind. Werden in einem beliebigen Strahlenbüschel S (Fig. 5) irgend vier Strahlen a, b, c, d

angenommen, so sind unter diesen zwei Paar getrennte Strahlen. Nämlich a und c sind durch b und d von einander getrennt, so dass man in dem Büschel von a nicht auf c übergehen kann, ohne entweder b oder d zu überschreiten.

Die Gesammtheit aller durch eine Gerade gehenden, allseitig unbegrenzten Ebenen wollen wir einen „Ebenenbüschel“ nennen, und die Gerade soll die „Axe“ desselben heissen. Die „Elemente“ des Büschels, d. h. seine Ebenen, denken wir uns, wie bei dem geraden Gebilde die Punkte, starr mit einander verbunden in unveränderlicher gegenseitiger Lage. Ein von zwei Ebenen als „Schenkeln“ begrenzter Theil eines Ebenenbüschels heisst ein „vollkommener Flächenwinkel“, und besteht aus zwei „einfachen“ Flächenwinkeln, die zu einander Scheitelwinkel sind. Unter vier Ebenen eines Büschels sind wieder zwei Paar getrennte.

Manchmal, wenn keine Zweideutigkeit möglich ist, werde ich ein Gebilde, welches nur aus einzelnen Punkten und Strecken einer Geraden besteht, eine Punktreihe nennen. Ebenso soll ein Gebilde in einem Büschel, welches nur aus einzelnen Elementen und Winkeln des Büschels besteht, manchmal selbst ein Büschel genannt werden. Dabei bitte ich Sie, sich stets zu erinnern, dass wir, abweichend von den gewöhnlichen Erklärungen, den Winkel als Theil eines Büschels definirt haben.

Die Punktreihe, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel sollen die einförmigen Grundgebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe heissen. Die Elemente eines einförmigen Grundgebildes, z. B. die Ebenen eines Ebenenbüschels, haben Sie sich als etwas Einfaches vorzustellen, indem Sie absehen von den Gebilden (Figuren u. dergl.), deren Träger jene Elemente sein können. Bei dem Strahlenbüschel wird diese Vorstellung dadurch erleichtert, dass wir die Geraden, deren Gesammtheit den Büschel ausmacht, eben mit dem Namen „Strahlen“ bezeichnen. Denn unter einem Strahl wird gewöhnlich eine Gerade an und für sich verstanden, abgesehen von den in ihr gelegenen Punkten und durch sie gehenden Ebenen. Leider fehlt uns für die Ebene eine entsprechende zweite Bezeichnung.

Von den Grundgebilden der ersten Stufe können wir uns auch eines mittelst jedes anderen erzeugt denken. So wird eine Punktreihe $ABCD$ (Fig. 6) aus jedem ausserhalb gelegenen Punkte S durch einen Strahlenbüschel $abcd$ projicirt, von welchem die Punktreihe $ABCD$ ein Schnitt ist. Ebenso wird die Punkt-

reihe $ADCB$ durch den Büschel $adcb$ projicirt. Ein Ebenenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ wird von jeder nicht durch seine Axe gehenden Ebene in einem Strahlenbüschel $abcd$ geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt; jeder Strahlenbüschel wird aus einem nicht in seiner Ebene gelegenen Punkte durch einen Ebenenbüschel projicirt. Endlich wird jeder Ebenenbüschel von einer Geraden, die mit seiner Axe nicht in einer Ebene liegt, in einer Punktreihe geschnitten, nämlich jede Ebene des Büschels in einem Punkte der Punktreihe; und jede Punktreihe wird aus einer Axe, die mit ihr nicht in einer Ebene liegt, durch einen Ebenenbüschel projicirt. Schon durch diese Beziehungen ist es gerechtfertigt, wenn wir die Punktreihe, den Strahlen- und den Ebenenbüschel als Grundgebilde der gleichen, nämlich der ersten Stufe bezeichnen. Denn wir dürfen uns hiernach vorstellen, dass eine Punktreihe ebenso viele Punkte enthält, wie ein Büschel Strahlen oder Ebenen.

Grundgebilde der zweiten Stufe haben wir zwei: nämlich das ebene System und den Strahlenbündel. Die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen, die in einer Ebene enthalten sind, nennen wir ein „ebenes System“; die Ebene ist der „Träger“ desselben. Im ebenen System sind hiernach nicht nur Punkte und Strahlen, sondern auch unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel als Elemente enthalten; denn alle in einer Geraden des Systems liegenden Punkte bilden zusammen eine Punktreihe, und alle durch einen Punkt gehenden Strahlen des Systems einen Strahlenbüschel. Mit Recht bezeichnen wir daher das ebene System als ein Grundgebilde von höherer Stufe als die einförmigen Grundgebilde. — Ferner nennen wir die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, die durch einen Punkt im Raume als Mittelpunkt denkbar sind, einen „Strahlenbündel“. In demselben sind nicht nur Strahlen und Ebenen, sondern auch unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel als Elemente enthalten. Denn alle Ebenen des Bündels, welche sich in einer und derselben Axe schneiden, bilden einen Ebenenbüschel; und ebenso bilden alle Strahlen desselben, welche in einer und derselben Ebene liegen, einen Strahlenbüschel. Der Strahlenbündel ist also wirklich ein Grundgebilde von höherer Stufe, als die einförmigen Grundgebilde. Der Name „Bündel“, welcher eine Vielheit höherer Art bezeichnen soll als „Büschel“, ist von v. Staudt gewiss sehr passend gewählt; doch können wir das vorliegende Grundgebilde mit demselben Rechte einen

„Ebenenbündel“ wie einen „Strahlenbündel“ nennen, weil es Ebenen sowohl wie Strahlen als Elemente enthält.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass wir uns auch im ebenen System und im Strahlenbündel die Elemente, aus welchen sie bestehen, als starr mit einander verbunden denken, so dass z. B. im Strahlenbündel die gegenseitige Lage der darin enthaltenen Strahlen, Ebenen und Büschel sich nicht ändert, wenn der Mittelpunkt, welcher der Träger des Bündels ist, bewegt wird.

Wir dürfen uns vorstellen, dass ein Strahlenbündel ebenso viele Strahlen und Ebenen enthält, wie ein ebenes System Punkte und Strahlen, und sind deshalb durchaus berechtigt, beide Grundgebilde als zu derselben, zweiten Stufe gehörig zu betrachten. Denn wir können uns den Strahlenbündel mittelst des ebenen Systems erzeugt denken, und umgekehrt. Projiciren wir nämlich ein ebenes System Σ aus einem nicht in ihm gelegenen Punkte S, so dass jeder Punkt P von Σ durch einen Strahl $S\bar{P}$ von S projicirt wird und jeder Strahl von Σ durch eine Ebene von S, so erhalten wir einen Strahlenbündel S, welcher ein „Schein“ des ebenen Systems Σ genannt wird, und von welchem das ebene System ein „Schnitt“ ist. Um Ihrer Vorstellung zu Hülfe zu kommen, will ich annehmen, Σ sei eine ebene, in bunten Farben prangende, unbegrenzte Landschaft, die sich zu Ihren Füssen ausbreiten möge, und der ausserhalb gelegene Punkt S sei Ihr Auge. Jeder Punkt der Landschaft sendet dann einen Lichtstrahl in ihr Auge, jede Gerade der Landschaft eine Lichtebene. Und stellen Sie sich diese Strahlen und Ebenen als allseitig unbegrenzt vor, so erhalten Sie als Schein der ganzen Landschaft offenbar einen Strahlenbündel. Wir können weiter schliessen: Jede Punktreihe des ebenen Systems wird aus S durch einen Strahlenbüschel projicirt, jeder Strahlenbüschel durch einen Ebenenbüschel, jede Curve durch eine conische Fläche des Bündels; oder mit anderen Worten: Der Schein einer Punktreihe, eines Strahlenbüschels oder einer Curve des ebenen Systems ist resp. ein Strahlenbüschel, ein Ebenenbüschel oder eine conische Fläche des Strahlenbündels. Ebenso wird jede Strecke durch einen ebenen Winkel projicirt, jeder ebene Winkel durch einen Flächenwinkel u. s. w. Betrachten wir umgekehrt den Strahlenbündel als das Ursprüngliche, denken wir uns etwa seinen Mittelpunkt als leuchtenden Punkt, der nach allen Seiten hin farbige Strahlen entsendet, so kann das ebene System als Schnitt desselben an-

gesehen werden. Dann wird jeder Strahl des Bündels in einem Punkte des ebenen Systems geschnitten, jede Ebene in einer Geraden, jeder Strahlenbüschel in einer Punktreihe und jeder Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel.

Endlich besteht auch noch ein Grundgebilde der dritten Stufe, nämlich das räumliche System, oder der unbegrenzte Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Geraden und Ebenen. Das räumliche System enthält auch unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe als Elemente; denn jede Ebene desselben ist der Träger eines ebenen Systems, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede Gerade der Träger einer Punktreihe und die Axe eines Ebenenbüschels.

Jedem der sechs Grundgebilde, die ich Ihnen soeben erklärt habe, entspricht nun eine besondere Geometrie. Sie werden mir gewiss gern zugestehen, dass es ebenso gut eine Geometrie des Strahlenbündels geben muss, wie eine Geometrie des ebenen Systems. Denn zu jedem ebenen geometrischen Gebilde können wir ja ein Gebilde im Strahlenbündel construiren, indem wir das ebene System aus einem ausserhalb gelegenen Punkte projiciren. Und die Sätze, welche sich von dem ebenen Gebilde aufstellen lassen, können dann in irgend einer Weise auf den Schein desselben im Strahlenbündel übertragen werden. Wir werden Gelegenheit haben, von dieser Methode häufigen Gebrauch zu machen. — Schwieriger ist es schon einzusehen, dass es auch eine Geometrie der einförmigen Grundgebilde, z. B. des geraden Gebildes oder der Punkte einer Geraden, geben müsse. Aber ich brauche Sie nur an den in der Einleitung angeführten Satz von den vier harmonischen Punkten zu erinnern, um Sie auch hiervon zu überzeugen. Wie ich Ihnen dort als Thatsache anführte, ist durch drei Punkte einer Geraden die Lage des vierten harmonischen Punktes zum Voraus bestimmt. Ferner nenne ich Ihnen den Satz, dass unter vier Strahlen eines Strahlenbüschels sich zwei Paar getrennte Strahlen befinden, um zu beweisen, dass allerdings von einer Geometrie der einförmigen Grundgebilde geredet werden kann, auch ohne dass wir das Maass zu Hülfe nehmen.

Die bisherigen Auseinandersetzungen machen es mir nun schon möglich, Ihnen in kurzen Worten den Hauptinhalt der Geometrie der Lage anzudeuten. Dieselbe handelt nämlich von den sechs Grundgebilden und ihren Beziehungen zu einander.

Zweiter Vortrag.

Unendlich ferne Elemente. Das Beziehen der Grundgebilde auf einander.

In der Geometrie der Alten werden zwei gerade Linien parallel genannt, wenn sie in derselben Ebene liegen und keinen Punkt mit einander gemein haben. Ebenso heissen zwei Ebenen, oder eine Ebene und eine Gerade parallel, wenn kein Punkt der einen zugleich in der anderen liegt. Die neuere Geometrie fasst den Parallelismus anders auf, und es soll meine nächste Aufgabe sein, Sie mit dieser abweichenden Auffassung, welche v. Staudt die perspectivische genannt hat, vertraut zu machen. Wir werden geradesweges auf dieselbe geführt, wenn wir die Grundgebilde aus einander ableiten, indem wir das eine als Schnitt oder Schein des anderen uns vorstellen.

Wenn eine Gerade u (Fig. 6) mit einem Strahlenbüschel S in einer Ebene liegt, ohne durch den Mittelpunkt desselben zu gehen, so schneidet sie ihn in einer Punktreihe; nämlich jeder Strahl $a, b, c, \ldots$ von S wird in einem Punkte A, B, C, $\ldots$ von u geschnitten. Beschreibt ein Strahl durch Drehung um S in irgend einem Sinne $a\,b\,c$ den Büschel S, so beschreibt gleichzeitig seine Spur auf der Geraden u im Sinne $A\,B\,C$ die Punktreihe u, indem dieser Schnittpunkt zuerst von A aus über B sich immer weiter bis ins Unendliche entfernt, und hernach von der entgegengesetzten Seite her wieder aus unendlicher Entfernung zu seiner Anfangslage zurückkehrt. Nach der Auffassung der Alten schneidet der sich drehende Strahl in der einen besonderen Lage p die Gerade u nicht mehr, in welcher er zu u parallel ist, so dass wir dieser Ausnahme wegen nicht allgemein den Satz aufstellen dürfen, dass jede Gerade, die mit u in einer Ebene liegt, auch mit u einen Punkt gemein hat. In der neueren Geometrie beseitigt man diese Ausnahme, indem man auch zwei parallelen Linien einen gemeinschaftlichen Punkt zuschreibt, nämlich einen „unendlich fernen“ Punkt.

Nach der perspectivischen Ansicht hat übrigens jede Gerade u nur einen einzigen unendlich fernen Punkt, weil nach einem

Axiome Euklid's durch einen ausserhalb gegebenen Punkt S nur ein einziger Parallelstrahl p zu u gezogen werden kann, und weil diesem Parallelstrahl mehr als ein mit u gemeinschaftlicher Punkt nicht wohl zuzuschreiben ist, da auch jeder andere Strahl des Büschels S nur einen Punkt mit u gemein hat. Diese Auffassung bietet der älteren Ansicht gegenüber den Vortheil, dass jetzt viele Sätze ganz allgemein ausgesprochen werden können, bei denen sonst immer Ausnahmen anzuführen waren, und dass manche scheinbar verschiedenen Sätze sich jetzt in einer einzigen Aussage zusammenfassen lassen. Uebrigens werden Sie sich wohl schon in der analytischen Geometrie mit dieser Ansicht befreundet haben; auch dort pflegt man zwei in einer Ebene gelegene Gerade parallel zu nennen, wenn die Coordinaten ihres Schnittpunktes unendlich gross sind, der letztere also in unendlicher Entfernung liegt.

Zu dem unendlich fernen Punkte einer Geraden gelangen wir, indem wir entweder nach der einen oder nach der andern Seite hin uns einen Punkt immer weiter auf der Geraden fortbewegt denken. Der unendlich ferne Punkt liegt also nach beiden Seiten hin auf der Geraden, oder sowohl nach der einen als auch nach der anderen Seite hin; und die Gerade erscheint als geschlossene Linie, deren beide Seiten durch den unendlich fernen Punkt zusammenhängen. Zu diesem Schluss werden wir gezwungen, sobald wir die vorhin begründete Auffassung zulassen, dass jede Gerade einen, und nur einen unendlich fernen Punkt besitze. Wir werden später sehen, dass in derselben Weise die beiden Zweige einer Hyperbel als im Unendlichen zusammenhängend zu betrachten sind. Auf ganz ähnliche Vorstellungen führt die Analysis, indem sie an häufigen Beispielen zeigt, dass man nicht nur durch Null, sondern auch durch das Unendliche vom Positiven zum Negativen übergehen kann.

Weil wir somit in einer Geraden von einem Punkte zu einem anderen gelangen können, indem wir den unendlich fernen Punkt überschreiten, so gilt jetzt der Satz: Unter vier Punkten einer Punktreihe sind nur zwei Paar getrennte, ebenso wie es unter vier Elementen eines Büschels nur zwei Paar getrennte giebt. Und wie ein Büschel durch zwei seiner Elemente in zwei vollkommene Winkel (Nebenwinkel) getheilt wird, so wird ein gerades Gebilde durch zwei seiner Punkte in zwei Strecken getheilt, von denen jede die „Ergänzung“ der anderen heisst.

Eine dieser beiden Strecken enthält den unendlich fernen Punkt der Geraden, falls nicht dieser selbst einen der Grenzpunkte der Strecken bildet.

Um den unendlich fernen Punkt einer Geraden von ihren in der Endlichkeit gelegenen Punkten zu unterscheiden, nennt man den ersteren wohl einen „uneigentlichen“, und die letzteren „eigentliche“ Punkte. Ebenso dürfte die Ihnen soeben vorgetragene neuere Auffassung des Parallelismus als eine uneigentliche zu bezeichnen sein. Die sämmtlichen Parallelen, welche sich in einer Ebene nach irgend einer Richtung ziehen lassen, haben nur einen unendlich fernen oder uneigentlichen Punkt mit einander gemein, nämlich denjenigen, welchen irgend eine von ihnen mit allen übrigen gemein hat. Diese Parallelen können daher auch als ein Strahlenbüschel aufgefasst werden, dessen Mittelpunkt ein unendlich ferner Punkt der Ebene ist, und den wir künftig einen Parallelstrahlenbüschel nennen wollen, wenn eine Unterscheidung von anderen Strahlenbüscheln wünschenswerth ist. Ebenso ist unter einem Parallelstrahlenbündel die Gesammtheit aller im Raume möglichen parallelen Strahlen von bestimmter Richtung nebst allen durch sie gehenden Ebenen zu verstehen. — Ich mache Sie noch darauf aufmerksam, dass die Aussagen: „Parallele Gerade haben gleiche Richtung“ und „sie enthalten denselben unendlich fernen Punkt“ ganz das Nämliche bedeuten. Durch jede Richtung wird ein unendlich ferner Punkt bestimmt, und umgekehrt durch jeden uneigentlichen Punkt im Raume eine Richtung; wie denn auch durch jede eigentliche Gerade eine Richtung und ein unendlich ferner Punkt bestimmt wird, nämlich der auf ihr enthaltene.

Von allen unendlich fernen Punkten einer Ebene wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen oder „uneigentlichen“ Linie liegen. Diese Linie muss als eine gerade angesehen werden, weil sie von jeder eigentlichen Geraden der Ebene in nur einem Punkte, dem unendlich fernen Punkte der Geraden, geschnitten wird; denn krumme Linien können mit einer Geraden mehr als einen Punkt gemein haben. Ein anderer Grund für diese Ansicht ist der Umstand, dass nach der perspectivischen Auffassung zwei parallele Ebenen ihre sämmtlichen unendlich fernen Punkte mit einander gemein haben müssen. Werden sie nämlich von irgend einer dritten Ebene in zwei eigentlichen Geraden geschnitten, so können diese sich in keinem eigentlichen Punkte schneiden; sie sind also, da sie in einer Ebene liegen, parallel und haben folglich einen

unendlich fernen Punkt beider Ebenen mit einander gemein. Auf diese Art wird bewiesen, dass jeder unendlich ferne Punkt der einen Ebene auch in der anderen liegt. Weil aber überhaupt je zwei sich schneidende Ebenen immer nur eine einzige Gerade mit einander gemein haben, so schreibt man auch zwei parallelen Ebenen nur eine einzige gemeinschaftliche Gerade zu.

Wie von parallelen Geraden gesagt wird, sie haben dieselbe Richtung, so sagt man auch wohl von parallelen Ebenen, sie haben dieselbe Stellung; gleichwie also in jeder Richtung ein unendlich ferner Punkt liegt, so liegt in jeder Stellung eine unendlich ferne Gerade. Weil sämmtliche parallele Ebenen, die im Raume in irgend einer Stellung denkbar sind, durch eine und dieselbe unendlich ferne Gerade gehen, nämlich durch diejenige, in welcher irgend eine dieser Ebenen von allen übrigen geschnitten wird, so können parallele Ebenen auch als ein Ebenenbüschel aufgefasst werden, dessen Axe eine unendlich ferne Gerade ist, und welcher ein Parallel-Ebenenbüschel genannt werden soll.

Von allen unendlich fernen Punkten und Linien im Raum wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen oder uneigentlichen Fläche liegen, welche als eine Ebene betrachtet werden muss, weil sie von jeder eigentlichen Geraden in nur einem Punkte und von jeder eigentlichen Ebene in einer Geraden geschnitten wird. Diese unendlich ferne oder „uneigentliche“ Ebene ist allen Parallelstrahlenbündeln und allen Parallelebenenbüscheln gemeinschaftlich, weil sie durch die Mittelpunkte der ersteren und die Axen der letzteren geht. Ebenso ist in jeder Ebene die unendlich ferne Gerade ein gemeinschaftlicher Strahl aller in dieser Ebene gelegenen Parallelstrahlenbüschel, weil sie durch die Mittelpunkte derselben geht. Der unendlich fernen Geraden einer Ebene kann deshalb keine bestimmte Richtung beigelegt werden, sondern sie enthält die Richtung (den unendlich fernen Punkt) jeder Geraden der Ebene.

Auf die unendlich fernen oder uneigentlichen Elemente wird noch einiges Licht geworfen durch die Beziehungen, welche sich zwischen den Grundgebilden aufstellen lassen. Zwei Gebilde heissen nämlich auf einander „bezogen“, wenn jedem Element des einen ein Element des anderen zugewiesen ist, und zwar so, dass jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen entspricht. Zwei solche

zu einander gehörige Elemente heissen „einander entsprechende“ oder „homologe“ Elemente. Wenn zwei Grundgebilde auf ein drittes bezogen sind, so sind sie auch auf einander bezogen. Denn jedem Elemente des dritten entspricht je ein Element der beiden anderen Grundgebilde, und diese beiden Elemente sind dadurch auch einander zugewiesen.

Am einfachsten und anschaulichsten bezieht man zwei ungleichartige Grundgebilde dadurch auf einander, dass man das eine als Schnitt oder Schein des anderen auffasst. Liegt z. B. (Fig. 6) ein Strahlenbüschel S mit einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden Punktreihe u in einer Ebene, so können Sie jedem Strahle des Büschels den auf ihm gelegenen Punkt der Punktreihe zuweisen. Dem Parallelstrahl p von S entspricht dann der unendlich ferne Punkt von u. Wird ein ebenes System Σ als Schnitt eines Strahlenbündels S betrachtet, dessen Mittelpunkt ausserhalb Σ liegt, so sind Σ und S in der Art aufeinander bezogen, dass jedem Punkte von Σ der durch ihn hindurchgehende Strahl von S entspricht, und jeder Geraden von Σ die durch sie gehende Ebene von S. Der zu Σ parallelen Ebene von S entspricht daher die unendlich ferne Gerade von Σ; und jedem in dieser Ebene gelegenen Strahl von S ist sein in Σ liegender unendlich ferner Punkt zugewiesen. Jedem Ebenenbüschel von S entspricht der Strahlenbüschel, in welchem er von Σ geschnitten wird; letzterer ist dann ein Parallelstrahlenbüschel, wenn die Axe des Ebenenbüschels zu Σ parallel läuft. Ist S ein Parallelstrahlenbündel, dessen Mittelpunkt also unendlich fern liegt, so entspricht jedem eigentlichen Punkte von Σ ein eigentlicher Strahl von S, und jedem uneigentlichen Element ein uneigentliches Element. Ist Σ die unendlich ferne Ebene und S ein eigentlicher Punkt, so entspricht jedem Strahl von S sein unendlich ferner Punkt, jeder Ebene ihre unendlich ferne Gerade, jedem Strahlenbüschel eine unendlich ferne Punktreihe, und jedem Ebenenbüschel ein unendlich ferner Strahlenbüschel.

Zwei gleichartige Grundgebilde können am einfachsten dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie als Schnitte oder Scheine eines und desselben dritten Grundgebildes betrachtet. So entsprechen einander in zwei Strahlenbüscheln oder Punktreihen, welche Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, je zwei solche Strahlen resp. Punkte, welche in derselben Ebene des Ebenenbüschels liegen. Anderseits können zwei Strahlen-

büschel S und S_1 (Fig. 7) auch so auf einander mit Leichtigkeit bezogen werden, dass sie Scheine einer und derselben Punktreihe u sind; so dass je zwei solche Strahlen a und a_1, b und b_1, c und c_1, ... einander entsprechen, welche durch denselben Punkt der Punktreihe gehen. Werden zwei in derselben Ebene liegende Punktreihen u und u_1 (Fig. 8) als Schnitte eines Strahlenbüschels S betrachtet, so ist beachtenswerth, dass dem unendlich fernen Punkte P oder Q_1 des einen im Allgemeinen ein eigentlicher Punkt P_1 resp. Q des anderen entspricht.

Zwei ebene Systeme sind auf einander bezogen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind. Eine ausgedehnte ebene Landschaft z. B. und das perspectivische Bild derselben, welches Sie erhalten, wenn Sie den durch Ihr Auge gehenden Schein der Landschaft durch irgend eine Ebene, eine verticale etwa, schneiden, sind so auf einander bezogen, dass je zwei Punkte der Landschaft und des Bildes einander entsprechen, wenn sie auf demselben Strahl des durch Ihr Auge gehenden Bündels liegen, also sich mit Ihrem Auge in einer Geraden befinden. Jeder Geraden der Landschaft entspricht eine Gerade des Bildes, und beide Geraden liegen mit dem Auge in einer Ebene. Der unendlich fernen Geraden der Landschaft (dem Horizont) entspricht im Allgemeinen eine eigentliche Gerade des Bildes, und hierin liegt wieder ein Grund, die unendlich ferne Linie einer Ebene als eine gerade Linie aufzufassen. Von zwei in der angegebenen Weise auf einander bezogenen ebenen Systemen sagt man wohl auch, das eine sei eine „Projection" des anderen, und der Mittelpunkt des Strahlenbündels, welcher von beiden Systemen zugleich ein Schein ist, heisst dann das „Projections-Centrum". Liegt dieser Mittelpunkt unendlich fern, ist also der Strahlenbündel ein Parallelstrahlenbündel, so geht diese Art der Projection über in die gewöhnliche Parallelprojection der darstellenden Geometrie.

Zwei Strahlenbündel können dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie als Scheine eines und desselben ebenen Systems auffasst. Jeder Strahl des einen Bündels schneidet dann den entsprechenden Strahl des anderen in einem Punkte des ebenen Systems; ebenso haben je zwei homologe Ebenen der Bündel eine Gerade des Systems zur Schnittlinie. Die Scheine einer und derselben ebenen Landschaft aus zwei verschiedenen Punkten sind solche Bündel.

Die nähere Erörterung dieses Beziehens von zwei Grundgebilden aufeinander muss ich vorläufig Ihrer eigenen Forschung überlassen; ich bemerke nur noch, dass die Grundgebilde noch in viel mannigfaltigerer Weise auf einander bezogen werden können. So z. B. können zwei ebene Systeme auch dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie auf ein und dasselbe dritte System bezieht. Um bei einem wiederholt gebrauchten Beispiele zu bleiben, so mögen Sie sich aus zwei verschiedenen Projectionscentren perspectivische Bilder von einer Landschaft construirt denken. Zwei solche Bilder oder ebene Systeme werden dann auch auf einander bezogen sein, weil jedes auf die Landschaft bezogen ist; und zwar entsprechen zwei Punkte derselben einander, wenn beide von demselben Punkte der Landschaft die Projectionen sind. Einer Geraden des einen Bildes wird dann stets wieder eine Gerade des zweiten entsprechen. Solche ebene Systeme haben aber im Allgemeinen nicht mehr die besondere Lage gegen einander, welche vorhin erörtert wurde, dass nämlich je zwei einander entsprechende Gerade in einer Ebene liegen, und die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten sich alle in einem bestimmten Punkte schneiden. Wir werden die Beziehungen von zwei solchen ebenen Systemen zu einander später noch genauer zu untersuchen haben. Uebrigens können zwei Systeme auch so auf einander bezogen werden, dass jeder Geraden des einen eine Curve im anderen entspricht, oder so, dass jedem Punkt des einen Systems eine Gerade des anderen und umgekehrt jeder Geraden des ersteren ein Punkt des letzteren entspricht. Vor der Hand überlasse ich es Ihrer Einbildungskraft, sich hier die mannigfaltigsten Beziehungen der Grundgebilde unter einander auszudenken.

Dritter Vortrag.

Das Gesetz der Reciprocität oder Dualität. Einfache und vollständige $n$ecke, $n$seite, $n$kante u. s. w.

Bevor ich Ihnen die Beziehungen weiter entwickele, welche sich zwischen den Grundgebilden der neueren Geometrie aufstellen lassen, muss ich Sie auf ein geometrisches Gesetz aufmerksam machen, welches in meinen Vorträgen eine wichtige Stelle einnehmen wird. Denn dasselbe erleichtert das Studium der Geometrie der Lage ausserordentlich dadurch, dass es den umfangreichen Stoff derselben in zwei grosse Gruppen theilt, und diese einander gegenüberstellt, so dass von diesen Gruppen die eine sich sofort aus der anderen ergiebt. Dieses Gesetz heisst das Gesetz der Reciprocität oder Dualität. Obwohl dasselbe in der Geometrie des Maasses nicht recht zur Geltung gebracht werden kann, so sind Ihnen doch schon manche Sätze bekannt, die geradezu darauf hinweisen, und an die ich Sie nur zu erinnern brauche, um Ihnen dieses Gesetz zum Bewusstsein zu bringen. Im Raume nämlich stehen der Punkt und die Ebene einander als „reciproke Begriffe“ gegenüber, so dass jeder Satz der Geometrie der Lage seine Ergänzung in einem anderen findet, den man aus dem ersteren ableitet, indem man die Ausdrücke Punkt und Ebene und daher auch Punktreihe und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel u. s. w. mit einander vertauscht. Gewöhnlich werden zwei solche „reciproke“ Sätze wie die beiden Seiten e i n e s Satzes neben einander gestellt, z. B.:

Zwei Punkte A und B bestimmen eine Gerade $\overline{AB}$, nämlich ihre Verbindungslinie.

Eine Gerade a und ein nicht auf derselben liegender Punkt B bestimmen eine Ebene $\overline{aB}$, welche durch beide hindurchgeht.

Drei Punkte $A, B, C,$ die nicht in einer Geraden liegen, be-

Zwei Ebenen α und β bestimmen eine Gerade $\overline{\alpha\beta}$, nämlich ihre Schnittlinie.

Eine Gerade a und eine nicht durch dieselbe gehende Ebene β bestimmem einen Punkt $a\beta$, welcher auf beiden liegt.

Drei Ebenen α, β, γ, die nicht durch eine Gerade gehen, be-

stimmen eine Ebene $\overline{ABC}$ (die Verbindungsebene).

Zwei Gerade a und b, die einen Punkt gemein haben, liegen in einer Ebene $\overline{ab}$.

stimmen einen Punkt $\alpha\dot{\beta}\gamma$ (den Schnittpunkt).

Zwei Gerade a und b, die in einer Ebene liegen, haben einen Punkt $a\dot{b}$ gemein.

Sie werden, beiläufig gesagt, schon bei diesen wenigen Sätzen bemerken, wie zweckmässig die Einführung der unendlich fernen oder uneigentlichen Elemente in die Geometrie ist. Ohne sie hätten wir alle diese Sätze nicht allgemein aussprechen können, sondern noch specielle Fälle derselben als Ausnahmen besonders hervorheben müssen. Der erste Satz rechts z. B. würde gelautet haben: „Zwei Ebenen α und β bestimmen entweder eine Gerade $\overline{\alpha\beta}$, oder sie sind parallel“; während nach der neueren Auffassungsweise auch im letzteren Falle eine Gerade bestimmt wird, nämlich die unendlich ferne Gerade der Ebenen. Ebenso hätten wir bei dem ersten Satz links mehrere Fälle unterscheiden müssen, jenachdem beide gegebene Punkte A und B eigentliche Punkte sind oder nicht. Wir hätten ihn demnach so aussprechen müssen: „Durch zwei (eigentliche) Punkte, oder durch einen Punkt und eine Richtung ist eine Gerade bestimmt“; während nach der perspectivischen Ansicht der letztere Fall dem ersteren einfach dadurch untergeordnet ist, dass unter den gegebenen Punkten auch unendlich ferne zugelassen werden. Aehnliche Bemerkungen werden Sie selbst leicht an jeden der übrigen Sätze knüpfen können.

Diese Sätze führen zu folgenden Aufgaben (ersten Grades), die wir künftig als immer ausführbar betrachten werden:

Durch zwei Punkte eine Gerade zu legen.

Durch eine Gerade und einen ausserhalb gegebenen Punkt eine Ebene zu legen.

Durch drei Punkte eine Ebene zu legen.

Durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene zu legen.

Die Schnittlinie von zwei Ebenen zu finden.

Von einer Geraden und einer Ebene, welche nicht durch die Gerade hindurchgeht, den Schnittpunkt zu finden.

Von drei Ebenen den Schnittpunkt zu finden.

Von zwei in einer Ebene gelegenen Geraden den Schnittpunkt zu finden.

Zur Uebung will ich noch einige oft benutzte Doppelsätze anführen. Ich rathe Ihnen sehr den Versuch an, zu der einen

Hälfte jedes dieser Doppelsätze die andere reciproke Hälfte selbst abzuleiten.

Sind vier Punkte A, B, C, D gegeben und schneiden sich die Verbindungslinien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, so liegen die Punkte in einer und derselben Ebene, so dass auch $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, sowie $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sich schneiden müssen.

Sind vier Ebenen α, β, γ, δ gegeben und schneiden sich die Schnittlinien $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\gamma\delta}$, so gehen die Ebenen durch einen und denselben Punkt, so dass auch $\overline{\alpha\gamma}$ und $\overline{\beta\delta}$, sowie $\overline{\alpha\delta}$ und $\overline{\beta\gamma}$ sich schneiden müssen.

Wenn von beliebig vielen Geraden je zwei sich schneiden, aber nicht alle

durch einen Punkt gehen, so liegen alle in einer Ebene.

in einer Ebene liegen, so gehen alle durch einen Punkt.

Häufig steht ein Satz sich selbst reciprok gegenüber, wenn Punkt und Ebene in symmetrischer Weise in ihm vorkommen; z. B. die Aufgabe: In einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine ausserhalb beider gegebene Gerade schneidet. Hier stehen zwei Auflösungen einander reciprok gegenüber:

Entweder verbinde man den Schnittpunkt der Geraden und der Ebene mit dem gegebenen Punkt;

oder man lege durch die Gerade und den gegebenen Punkt eine Ebene und suche deren Schnittlinie mit der gegebenen Ebene.

Auf diese Aufgabe lassen sich die folgenden leicht zurückführen:

Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, die mit dem Punkt nicht in einer und derselben Ebene liegen, schneidet. Man lege nämlich durch den gegebenen Punkt und eine der gegebenen Geraden eine Ebene,

In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, die mit der Ebene nicht einen und denselben Punkt gemein haben, schneidet. Man bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit einer der gegebenen Geraden,

so ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

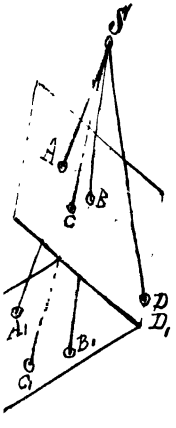
Die Aufgabe: „Eine Gerade zu ziehen, welche drei gegebene schneidet“, steht wieder sich selbst gegenüber. Entweder kann man in der einen Geraden einen Punkt annehmen, oder durch dieselbe eine Ebene legen, und sodann nach den Angaben der

vorhergehenden Doppelaufgabe eine Gerade suchen, welche durch diesen Punkt geht, oder aber in dieser Ebene liegt, und die beiden anderen gegebenen Geraden schneidet.

Auch die Grundgebilde können einander als reciproke Gebilde gegenübergestellt werden, z. B. das ebene System und der Strahlenbündel schon deshalb, weil ihre Träger, nämlich die Ebene und der Punkt, einander reciprok sind. Es stehen sodann einander gegenüber:

im ebenen System:	und im Strahlenbündel:
der Punkt; die Punktreihe; der Strahl als Verbindungslinie von Punkten; der Strahlenbüschel u. s. w.,	die Ebene; der Ebenenbüschel; der Strahl als Schnittlinie von Ebenen; der Strahlenbüschel u. s. w.

Ihnen wird hier wie bei manchen früheren Sätzen die Bemerkung sich aufdrängen, dass im Raume die Gerade (oder der Strahl) sich selbst gegenübersteht. Wirklich nimmt dieselbe eine Zwischenstellung ein zwischen den reciproken Elementen Punkt und Ebene. Als Beispiel eines Doppelsatzes, in welchem das ebene System und der Strahlenbündel als reciproke Gebilde einander gegenüberstehen, diene der folgende:



Werden zwei ebene Systeme dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Schnitte eines und desselben Strahlenbündels betrachtet, so liegen je zwei einander entsprechende Elemente (Punkte oder Gerade) der Systeme auf einem und demselben Element (Strahl oder Ebene) des Strahlenbündels. Die Schnittlinie der beiden Ebenen fällt mit ihrer entsprechenden Geraden zusammen oder entspricht sich selbst: dasselbe gilt von jedem in dieser Geraden befindlichen Punkte. Die beiden ebenen Systeme haben also ein gerades Gebilde „entsprechend gemein".

Werden zwei Strahlenbündel dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Scheine eines und desselben ebenen Systems betrachtet, so gehen je zwei einander entsprechende Elemente (Strahlen oder Ebenen) der Bündel durch ein und dasselbe Element (Punkt oder Gerade) des ebenen Systems. Der gemeinschaftliche Strahl der Bündel, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, fällt mit seinem entsprechenden zusammen oder entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jeder durch diesen Strahl gehenden Ebene. Die beiden Strahlenbündel haben also einen Ebenenbüschel „entsprechend gemein".

Wenn nämlich zwei Gebilde auf einander bezogen sind und ein Element des einen mit dem ihm entsprechenden Elemente des anderen zusammenfällt, d. h. identisch ist, so sagt man, „die beiden Gebilde haben dieses Element entsprechend gemein".

Wie im Raume der Punkt und die Ebene, so stehen einander in der Ebene der Punkt und die Gerade, daher auch die Punktreihe und der Strahlenbüschel, die Strecke und der Winkel etc. als reciproke Begriffe gegenüber; ebenso im Strahlenbündel der Strahl und die Ebene, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel etc. Z. B.:

α_1) Je zwei Punkte einer Ebene bestimmen eine Gerade.

α_2) Je zwei Gerade einer Ebene bestimmen einen Punkt.

α_3) Je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine Ebene.

α_4) Je zwei Ebenen eines Bündels bestimmen einen Strahl.

Eine ebene Curve kann aufgefasst werden:

β_1) als Inbegriff aller auf ihr liegenden Punkte;

β_2) als Inbegriff aller sie einhüllenden Geraden (Tangenten) (Fig. 9).

Und zwar werden Sie finden, dass in der neueren Geometrie die letztere Auffassung ebenso häufig in Anwendung gebracht wird, wie die erstere. Ebenso kann eine conische Fläche (im Strahlenbündel) aufgefasst werden:

β_3) als Inbegriff aller in ihr liegenden Strahlen;

β_4) als Inbegriff aller sie einhüllenden Ebenen (Berührungsebenen).

Von vier solchen zusammengehörigen Sätzen können immer die beiden auf den Strahlenbündel bezüglichen dadurch aus den beiden übrigen, welche in die Geometrie der Ebene gehören, abgeleitet werden, dass man das ebene System aus irgend einem Mittelpunkte durch einen Strahlenbündel projicirt. In der Regel werde ich deshalb künftig nur die ersten beiden anführen, und es Ihnen überlassen, die übrigen selbst aufzusuchen. Im Raume, wo Punkt und Ebene einander reciprok sind, stehen der erste und letzte (wie α_1 und α_4), sowie der zweite und dritte (wie α_2 und α_3) von je vier solchen Sätzen einander als reciproke Sätze gegenüber.

Das Gesetz der Reciprocität wird Ihnen im Laufe unserer Untersuchungen noch immer klarer und geläufiger werden; doch kann ich erst nach einer Reihe von Entwickelungen über die einförmigen Grundgebilde Ihnen den Beweis führen, dass es in der

Geometrie der Lage allgemeine Geltung hat, oder dass wirklich jedem Satze derselben ein reciproker Satz entspricht. Bis dahin werde ich meine Vorträge so einrichten, dass reciproke Sätze einander gehörig gegenübergestellt werden, und ihren Beweis werde ich so führen, dass der Dualismus deutlich hervortritt. Doch ist zu dem Ende nothwendig, dass ich Ihnen noch einige reciproke Begriffe vorher entwickele, und namentlich auch einige derjenigen geometrischen Begriffe modificire, die Sie aus der Geometrie des Maasses mit herübergebracht haben in die neuere Geometrie.

Ich meine hier besonders den Begriff des $n$ecks. In der neueren Geometrie verstehen wir unter einem „einfachen ebenen $n$eck“ in der Regel nicht ein Stück der Ebene, welches von n sich schneidenden Geraden allseitig begrenzt wird, sondern ein System von n Punkten einer Ebene und den n Geraden oder Seiten, deren jede zwei aufeinanderfolgende Punkte (Eckpunkte) verbindet. Die letzteren denken wir uns dabei in bestimmter Reihenfolge, und nehmen an, dass keine drei aufeinanderfolgende derselben in gerader Linie liegen.

Das einfache $n$eck kann auch „einfaches $n$seit“ genannt werden; nämlich ein einfaches $n$seit ist ein ebenes System von n Geraden (Seiten) und den n Punkten, in denen je zwei aufeinanderfolgende sich schneiden. $n$eck und $n$seit sind reciproke Begriffe; den Verbindungslinien von je zwei nicht aufeinanderfolgenden Eckpunkten (d. h. den Diagonalen) eines einfachen $n$ecks stehen im einfachen $n$seit die Schnittpunkte von je zwei nicht aufeinanderfolgenden Seiten gegenüber. In der Geometrie der Alten, wo unter einem $n$eck ein Stück der Ebene verstanden wird, schliesst man verschlungene $n$ecke, wie das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 10) oder das Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 11) in der Regel aus. Die $n$ecke und $n$seite der neueren Geometrie geben zu einer solchen Unterscheidung um so weniger Anlass, als man sich ihre Seiten als unbegrenzt vorzustellen hat. Dagegen kann man auch hier von den $2n$ Elementen (Eckpunkten und Seiten) eines einfachen $n$ecks oder $n$seits je zwei solche „einander gegenüberliegend“ nennen, welche in dem einen wie im anderen Sinne durch die halbe Anzahl der übrigen Elemente von einander getrennt sind, also allgemein das m^{te} und das $n + m^{te}$ der aufeinanderfolgenden Elemente. So z. B. liegen im Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 10) je ein Eckpunkt und eine Seite einander gegenüber, nämlich A und $\overline{CD}$, B und $\overline{DE}$, C und $\overline{EA}$ u. s. w.; im Sechseck oder Sechsseit $ABCDEF$ (Fig. 11)

liegen dagegen je zwei Eckpunkte und je zwei Seiten einander gegenüber, nämlich A und D, $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$, B und E, $\overline{BC}$ und $\overline{EF}$ u. s. w.

Ausser den einfachen kennt die neuere Geometrie auch noch „vollständige $n$ecke und $n$seite", und gerade an diesen Gebilden lässt sich wiederum das Reciprocitätsgesetz deutlich erkennen. Wir nennen nämlich:

Vollständiges ebenes $n$eck: ein System von n Punkten der Ebene mit ihren sämmtlichen Verbindungslinien (Seiten), oder, was dasselbe ist, ein einfaches n eck mit seinen sämmtlichen Diagonalen.

Vollständiges ebenes $n$seit: ein System von n Geraden der Ebene mit ihren sämmtlichen Schnittpunkten (Eckpunkten), oder, was dasselbe ist, ein einfaches n seit mit den sämmtlichen Schnittpunkten seiner Seiten.

Hierbei wird angenommen, dass im n eck keine drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen und im n seit keine drei Seiten durch einen Punkt gehen.

In jedem Eckpunkte schneiden sich n—1 Seiten des vollständigen n ecks; dieselben gehen durch die übrigen $n-1$ Eckpunkte. Somit ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl aller Seiten des vollständigen n ecks.

Auf jeder Seite liegen $n-1$ Eckpunkte des vollständigen n seits; durch dieselben gehen die übrigen $n-1$ Seiten. Somit ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl aller Eckpunkte des vollständigen n seits.

Sie erkennen leicht, dass im vollständigen n eck und n seit mehrere einfache n ecke und n seite enthalten sind, sobald $n > 3$ ist. Z. B.:

Ein vollständiges Viereck $ABCD$ (Fig. 12) hat sechs Seiten. Je zwei dieser Seiten, welche nicht durch einen und denselben Eckpunkt gehen, wie $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, oder $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, oder endlich $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$, sollen „Gegenseiten" des Vierecks heissen, sodass drei Paar Gegenseiten vorhanden sind. Auch enthält das vollständige Viereck drei einfache Vierecke $ABCD$, $ACDB$

Ein vollständiges Vierseit $abcd$ (Fig. 13) hat sechs Eckpunkte. Je zwei derselben, welche nicht auf einer und derselben Seite liegen, wie $\dot{a}\dot{b}$ und $\dot{c}\dot{d}$, oder $\dot{a}\dot{c}$ und $\dot{b}\dot{d}$, oder endlich $\dot{a}\dot{d}$ und $\dot{b}\dot{c}$, sollen „Gegenpunkte" des Vierseits heissen, sodass drei Paar Gegenpunkte vorhanden sind. Auch enthält das vollständige Vierseit drei einfache Vierseite $abcd$, $acdb$ und $adbc$, deren Eckpunkte aus

und $ADBC$, deren Seiten aus je zwei Paar Gegenseiten von jenem bestehen.

je zwei Paar Gegenpunkten von jenem bestehen.

Die Gebilde im Strahlenbündel, welche diesen ebenen Gebilden entsprechen, werden Sie am leichtesten dadurch auffassen, dass Sie sich die letzteren aus einem ausserhalb der Ebene gelegenen Punkte projicirt denken. Jedes ebene $n$eck wird dann durch ein „$n$kant“ und jedes ebene $n$seit durch ein „$n$seit im Strahlenbündel“ projicirt. Hiernach ist:

Ein vollständiges $n$kant: ein System von n Strahlen im Strahlenbündel mit ihren sämmtlichen Verbindungsebenen (Seiten), wobei angenommen wird, dass keine drei der n Strahlen oder „Kanten“ in einer Ebene liegen.

Ein vollständiges $n$seit im Strahlenbündel: ein System von n Ebenen des letzteren mit ihren sämmtlichen Schnittlinien (Kanten), wobei angenommen wird, dass keine drei der n Ebenen oder „Seiten“ durch eine und dieselbe Gerade gehen.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, die „einfachen“ $n$kante und $n$seite im Strahlenbündel hiernach zu definiren, sowie zu den Eigenschaften der ebenen Gebilde analoge Eigenschaften der Gebilde im Strahlenbündel aufzufinden. Ich schliesse diese lange Reihe von Definitionen mit der Erklärung der analogen räumlichen Gebilde.

Ein vollständiges räumliches $n$eck besteht aus n Punkten (Eckpunkten), von welchem keine vier in einer Ebene liegen, den Geraden (Kanten), von denen jede zwei, und den Ebenen (Flächen), von denen jede drei der n Punkte verbindet.

Ein vollständiges $n$flach besteht aus n Ebenen (Flächen), von welchen keine vier durch einen Punkt gehen, den Geraden (Kanten), in denen je zwei, und den Punkten (Eckpunkten), in denen je drei der n Ebenen sich schneiden.

Ich überlasse es Ihrer eigenen Forschung, die Anzahl der Kanten und Flächen eines räumlichen n ecks, sowie der Kanten und Ecken eines $n$flachs zu bestimmen. Ich bemerke nur noch, dass im Raume das Viereck und das Vierflach (oder Tetraeder) nicht von einander verschieden sind, ebenso wenig wie in der Ebene das Dreieck und das Dreiseit. Dass gleichwohl auch bei dem Tetraeder das Reciprocitätsgesetz sich geltend macht, zeigt u. A. der Doppelsatz:

Die vier Eckpunkte und sechs Kanten eines Tetraeders werden aus jedem Punkte, welcher in keiner seiner Flächen liegt, durch die vier Kanten und sechs Seiten eines vollständigen Vierkantes projicirt.

Die vier Flächen und sechs Kanten eines Tetraeders werden von jeder Ebene, welche durch keinen seiner Eckpunkte geht, in den vier Seiten und sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits geschnitten.

Sie werden hier bemerken, dass im Raume das vollständige ebene $n$eck dem vollständigen $n$seit im Strahlenbündel, und das vollständige ebene $n$seit dem vollständigen $n$kant gegenübersteht, weil Punkt und Ebene reciproke Begriffe sind.

Vierter Vortrag.

Das Beziehen vollständiger $n$ecke, $n$seite und $n$kante auf einander. Harmonische Gebilde.

Durch meine bisherigen Vorträge habe ich eine der mir vorliegenden Aufgaben zu lösen gesucht: nämlich die Aufgabe, Sie mit den wichtigsten, der neueren Geometrie eigenthümlichen Begriffen bekannt zu machen. Vielleicht haben Sie diese zahlreichen, an einander gereihten Definitionen manchmal ermüdet; doch war es nothwendig, Ihnen dieselben im Zusammenhange vorzuführen, damit wir später desto ungestörter die reichen Schätze, welche die Geometrie der Lage bietet, zu Tage fördern können.

Nunmehr werden wir zu den ersten eigentlichen Lehrsätzen der neueren Geometrie gelangen; denn die sehr einfachen, bisher angeführten Sätze habe ich mehr gelegentlich, um Ihnen die ungewohnten neuen Begriffe geläufiger zu machen und der Vollständigkeit wegen genannt, als weil sie alle zur Begründung der Geometrie der Lage durchaus nothwendig wären. Dagegen muss ich die Sätze über die harmonischen Punkte, Strahlen und Ebenen, mit einem Wort die Sätze über die harmonischen Gebilde, die ich Ihnen jetzt entwickeln werde, als wirkliche Fundamentalsätze unserer Wissenschaft bezeichnen.

Die Eigenschaften der harmonischen Gebilde, deren ich schon in der Einleitung Erwähnung that, lassen sich am leichtesten beweisen mittelst einiger sehr einfacher Sätze über das Beziehen von n ecken, n seiten und n kanten auf einander. In ähnlicher Weise, wie wir früher die Grundgebilde auf einander bezogen haben, können wir nämlich auch bei diesen Arten von Gebilden jeder Ecke, Seite oder Kante des einen ein entsprechendes Element des anderen zuweisen. Ein Viereck z. B. kann auf ein zweites bezogen werden, indem wir jedem Eckpunkte des ersteren einen Eckpunkt des letzteren zuweisen; dann wird auch jeder Seite des ersteren eine Seite des letzteren entsprechen. Hier ergeben sich nun die evidenten Sätze:

Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke $A\,B\,C$ und $A_1 B_1 C_1$ (Fig. 3) in verschiedenen Ebenen liegen, und je zwei homologe Seiten, wie $\overline{AB}$ und $\overline{A_1 B_1}$, sich schneiden (natürlich auf der Schnittlinie u der beiden Dreiecksebenen), so bestimmen die Ebenen der drei Paare entsprechender Seiten ein Dreikant, von welchem die beiden Dreiecke Schnitte sind. Die Verbindungslinien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ von je zwei homologen Eckpunkten schneiden sich daher in einem Punkte, nämlich in dem Mittelpunkte S dieses Dreikantes.

Wenn zwei auf einander bezogene Dreikante (oder Dreiseite im Strahlenbündel) verschiedenen Strahlenbündeln angehören, und je zwei homologe Kanten sich schneiden, so bestimmen die drei Schnittpunkte ein Dreieck, von welchem die beiden Dreikante Scheine sind. Die Schnittlinien von je zwei homologen Ebenen (Seiten) der Dreikante liegen daher in der Ebene dieses Dreiecks, dessen Seiten sie sind.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, von jeder Hälfte dieses Doppelsatzes die Umkehrung aufzustellen. Wir finden mit seiner Hülfe:

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke $A\,B\,C\,D$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 14) in verschiedenen Ebenen liegen, deren Schnittlinie u durch keinen der acht Eckpunkte geht, und fünf Seiten a, b, c, d, e des einen

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite verschiedenen Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der acht Seiten liegt, und fünf Kanten des einen Vierseits die ent-

Vierecks die ihnen beziehlich entsprechenden Seiten a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 des anderen (auf u) schneiden, so sind die beiden Vierecke Schnitte eines und desselben vollständigen Vierkants, daher auch ihre übrigen beiden Seiten f und f_1 sich schneiden.

Nach dem vorigen Satze schneiden sich nämlich sowohl die Linien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$, als auch die Linien $\overline{DD_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ in einem Punkte; die Geraden $\overline{AA_1}$ und $\overline{DD_1}$ begegnen einander also im Schnittpunkt S von $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$, dem Mittelpunkt des im Satze angeführten Vierkantes. Und da die Geraden f und f_1 in der durch $\overline{AA_1}$ und $\overline{DD_1}$ bestimmten Ebene liegen, so müssen sie sich gleichfalls schneiden.

sprechenden Kanten des anderen schneiden, so sind die beiden Vierseite Scheine eines und desselben vollständigen ebenen Vierseits, daher auch ihre beiden übrigen Kanten sich schneiden.

Die fünf Kanten des einen vollständigen Vierseits, welche von den entsprechenden Kanten des anderen geschnitten werden, bestimmen nämlich zwei im Vierseit gelegene Dreiseite, deren Seiten von ihren entsprechenden nach dem vorigen Satze in je drei Seiten eines Dreiecks geschnitten werden. Diese beiden Dreiecke haben aber zwei Seiten gemein; sie liegen daher in einer Ebene und bestimmen das ebene Vierseit, von welchem die gegebenen Vierseite Scheine sind.

Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich hier die Untersuchung rechts fallen lassen, und nur eines der links gewonnenen Ergebnisse benutzen, um die Lehre von den harmonischen Elementen zu begründen. Auch auf diesem Wege werden wir bald genug zu neuen Sätzen gelangen, die einander wie die bisherigen reciprok gegenüberstehen. Wir fanden soeben:

Wenn von zwei auf einander bezogenen vollständigen Vierecken fünf Paare homologer Seiten sich schneiden in Punkten einer Geraden u, *welche durch keinen der acht Eckpunkte geht, so liegt auch der Schnittpunkt des sechsten Paares auf dieser Geraden.*

Dieser Satz gilt nicht bloss für den Fall, dass die Vierecke in verschiedenen Ebenen liegen. Denn liegen sie in derselben Ebene, so können wir diesen Fall auf den schon erledigten dadurch zurückführen, dass wir das eine Viereck entweder um die Gerade u drehen aus der gegebenen Ebene heraus, oder es auf eine zweite durch u gelegte Ebene aus einem beliebigen Mittelpunkte projiciren. In beiden Fällen ergiebt sich sofort,

dass durch den Schnittpunkt von u mit der sechsten Seite dieses Vierecks auch die sechste Seite des andern Vierecks hindurchgeht. — Ist u eine unendlich ferne Gerade, so lautet, beiläufig bemerkt, unser Satz: Wenn von zwei auf einander bezogenen vollständigen Vierecken fünf Paare homologer Seiten parallel sind, so laufen auch die letzten beiden Seiten parallel.

Wir können nun folgende Definition aufstellen:

Vier Punkte A, B, C, D *einer Geraden heissen vier harmonische Punkte oder eine harmonische Punktreihe, wenn sie zu einem Viereck solche Lage haben, dass im ersten und im dritten von ihnen je zwei Gegenseiten des Vierecks sich schneiden und durch den zweiten und den vierten Punkt die beiden Diagonalen desselben gehen.*

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich dann sofort der wichtige Satz:

Durch drei Punkte A, B, C *einer Geraden und ihre Reihenfolge ist der vierte harmonische Punkt* D *völlig bestimmt.*

Nämlich man findet D durch Construction irgend eines Vierecks $KLMN$ (Fig. 15), von welchem eine Diagonale $\overline{LN}$ durch den zweiten Punkt B geht, zwei Gegenseiten $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ aber sich im ersten Punkte A und die anderen beiden Gegenseiten $\overline{LM}$ und $\overline{NK}$ sich im dritten Punkte C schneiden; die zweite Diagonale $\overline{KM}$ geht durch D. Construirt man ein anderes Viereck $K_1L_1M_1N_1$, welches zu A, B und C ähnlich liegt wie $KLMN$, so muss nach dem früheren Satze (S. 31) auch dessen zweite Diagonale $\overline{K_1M_1}$ (als sechste Seite des vollständigen Vierecks $K_1L_1M_1N_1$) durch den Schnittpunkt D von $\overline{KM}$ und $\overline{ABC}$ gehen.

Die Punkte B *und* D *auf den Diagonalen sind durch die Schnittpunkte* A *und* C *der zwei Paar Gegenseiten von einander getrennt.*

Projiciren wir nämlich die Punkte A, B, C, D aus einem beliebigen Mittelpunkt auf eine andere Gerade, so sind die Projectionsstrahlen und folglich auch die Projectionen von einem Paar getrennter Punkte durch diejenigen des anderen Paares von einander getrennt. Ist nun Q (Fig. 15) der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$ des Vierecks $KLMN$, so ist $KQMD$ eine Projection von $ABCD$ aus dem Punkte L und $MQKD$ eine solche aus dem Punkte N. Wäre also A nicht von C, sondern etwa von B durch die übrigen beiden Punkte getrennt, so müsste einerseits K von Q, anderseits aber auch M von Q

getrennt sein, was unmöglich ist, weil Q nur von einem der drei Punkte K, M, D durch die übrigen beiden getrennt sein kann. Wäre dagegen A von D getrennt, so müsste K von D und zugleich M von D getrennt sein, was ebenfalls unmöglich ist. Folglich muss A von C getrennt sein durch die Punkte B und D.

Aus einem nicht in der Ebene des vollständigen Vierecks gelegenen Punkte (aus Ihrem Auge z. B.) wird das Viereck durch ein vollständiges Vierkant projicirt, die vier harmonischen Punkte aber durch vier Strahlen, welche „vier harmonische Strahlen oder ein harmonischer Strahlenbüschel“ genannt werden sollen. Dieselben haben die Eigenschaft, dass sie von jeder nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene in vier harmonischen Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 geschnitten werden. Denn jede solche Ebene schneidet das vollständige Vierkant in einem Viereck, von welchem zwei Gegenseiten in A_1, zwei andere in C_1 sich schneiden, und dessen letzten beiden Seiten resp. durch B_1 und D_1 gehen.

Werden vier harmonische Punkte aus einer Axe projicirt, die mit ihnen nicht in einer Ebene liegt, so erhalten wir „vier harmonische Ebenen oder einen harmonischen Ebenenbüschel“. Jede fünfte Ebene, welche die vier harmonischen Punkte enthält, schneidet zufolge des eben Bewiesenen die vier harmonischen Ebenen in harmonischen Strahlen; und folglich gilt dasselbe auch von jeder beliebigen Schnittebene, die nicht durch die Axe des harmonischen Ebenenbüschels geht. Denn eine solche schneidet die vier harmonischen Strahlen von jeder der ersteren Schnittebenen in vier harmonischen Punkten, durch welche ihre eigenen Schnittlinien mit den harmonischen Ebenen hindurchgehen. Hieraus folgt auch, dass jede zu der Axe windschiefe Gerade die vier Ebenen in vier harmonischen Punkten schneidet. Ebenso wird ein harmonischer Strahlenbüschel aus einem nicht in seiner Ebene gelegenen Punkte durch einen harmonischen Ebenenbüschel projicirt. Ueberhaupt können wir folgende Sätze aufstellen:

Vier harmonische Punkte werden aus jeder Geraden durch vier harmonische Ebenen, und aus jedem Punkte durch vier harmonische Strahlen projicirt.

Vier harmonische Ebenen werden von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten, und von jeder Ebene in vier harmonischen Strahlen geschnitten.

Vier harmonische Strahlen werden aus jedem Punkte durch vier harmonische Ebenen projicirt.

Vier harmonische Strahlen werden von jeder Ebene in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Diese verschiedenen Sätze können wir zusammenfassen zu dem wichtigen Theoreme:

Aus einem harmonischen Grundgebilde ergeben sich durch Projiciren und Schneiden immer wieder harmonische Grundgebilde.

Zugleich erkennen Sie, dass durch drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische vollständig bestimmt ist, wenn noch angegeben wird, von welchem der ersteren dasselbe getrennt ist. Denn sind die gegebenen Elemente drei Punkte einer Geraden, so führt das vollständige Viereck zu dem vierten harmonischen Punkte. Sind sie dagegen Strahlen oder Ebenen eines Büschels, so schneiden wir denselben durch eine Gerade, und suchen zu den drei Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt. Durch diesen geht dann das gesuchte vierte Element des harmonischen Büschels. Hierdurch ist zugleich die Aufgabe gelöst, zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren.

Die Richtigkeit der folgenden Sätze wird Ihnen sofort einleuchten:

Werden drei Ebenen α, β, γ eines Ebenenbüschels von beliebigen Transversalen geschnitten, und wird auf jeder Transversale zu den drei Schnittpunkten der vierte harmonische, von dem Schnittpunkt mit β getrennte Punkt gesucht, so liegen alle diese vierten Punkte in einer Ebene δ, welche zu α, β, γ die vierte harmonische, von β getrennte ist.

Werden drei Punkte A, B, C einer Punktreihe aus beliebigen Axen projicirt, und wird für jede Axe zu den drei projicirenden Ebenen die vierte harmonische bestimmt, welche von der durch B gelegten getrennt ist, so gehen alle diese vierten Ebenen durch einen Punkt D, welcher zu A, B, C der vierte harmonische, von B getrennte Punkt ist.

Statt dieser beiden Sätze, die für den Raum einander reciprok gegenüberstehen, werden Sie leicht zwei entsprechende Sätze für die Ebene aufstellen können, in denen ein Strahlenbüschel die Stelle des Ebenenbüschels vertritt. Ebenso ergeben sich zwei analoge Sätze für den Strahlenbündel.

Bei der Erklärung der harmonischen Punkte A, B, C, D (Fig. 15) mittelst des Vierecks $KLMN$ habe ich einen Unterschied gemacht zwischen den beiden Punkten A und C, in denen die Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, und den beiden übrigen B und D, durch welche die Diagonalen gehen. Doch

lässt sich zeigen, dass beide Paare von Punkten in der harmonischen Punktreihe ganz die gleiche Rolle spielen. Zunächst leuchtet ein, dass von vier harmonischen Punkten je zwei getrennte mit einander vertauscht werden können, ohne dass die Punkte aufhören, vier harmonische Punkte zu sein; oder: Ist $ABCD$ eine harmonische Punktreihe, so gilt dasselbe von $ADCB$, $CBAD$ und $CDAB$. Denn in jeder dieser Punktreihen gehen durch den ersten und dritten Punkt je zwei Gegenseiten, und durch den zweiten und vierten die Diagonalen des Vierecks $KLMN$. Wenn nun durch den Schnittpunkt Q der Diagonalen (Fig. 16) die Geraden $\overline{AQ}$ und $\overline{CQ}$ gezogen werden, so bestimmen diese auf den resp. Seiten $\overline{NK}$, $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ und $\overline{MN}$ vier neue Punkte S, T, U und V. Von den Verbindungslinien $\overline{ST}$, $\overline{TU}$, $\overline{UV}$ und $\overline{VS}$ derselben, welche als zweite Diagonalen der Vierecke $KSQT$, $LTQU$, $MUQV$ und $NVQS$ anzusehen sind, gehen aber zwei gegenüberliegende durch B und die übrigen durch D. Wir erhalten also ein Viereck $STUV$, von welchem je zwei Gegenseiten durch B und D, und die Diagonalen durch A und C gehen. Es folgt daraus, dass in einer harmonischen Punktreihe auch die zwei Paare getrennter Punkte mit einander vertauscht werden können, ohne dass die vier Punkte aufhören, harmonische Punkte zu sein, oder der Satz:

Ist A B C D *ein harmonisches Gebilde, so sind nicht nur* A D C B, C B A D *und* C D A B *ebenfalls solche, sondern auch* D C B A, D A B C, B C D A *und* B A D C.

Dieser Satz gilt natürlich auch für harmonische Strahlen und Ebenen, die wir ja mittelst der harmonischen Punkte definirt haben.

Von zwei getrennten Elementen eines harmonischen Gebildes werden wir häufig sagen, sie seien durch die übrigen beiden Elemente „harmonisch getrennt“. Ausserdem werde ich mich manchmal, um einen Satz kürzer und einfacher aussprechen zu können, der Ausdrucksweise bedienen: zwei Elemente eines Gebildes seien durch zwei andere, dem Gebilde nicht angehörige Elemente harmonisch getrennt; nämlich dann, wenn durch letztere in dem Gebilde zwei Elemente bestimmt werden, durch welche die ersten beiden Elemente harmonisch getrennt sind. Zwei Punkte A und C z. B. heissen harmonisch getrennt durch zwei Ebenen β und δ, wenn diese die Gerade $\overline{AC}$ in zwei solchen Punkten B und D schneiden, dass $ABCD$ vier harmonische Punkte sind, und ebenso heissen β und δ durch A und C harmonisch getrennt,

wenn sie durch die beiden Ebenen harmonisch getrennt sind, welche aus ihrer Schnittlinie $\overline{\beta\delta}$ die Punkte A und C projiciren. Für Gebilde in der Ebene gilt z. B. der Doppelsatz:

Durch zwei Gerade und einen ausserhalb gegebenen Punkt ist eine dritte Gerade bestimmt; dieselbe geht durch den Schnittpunkt der beiden ersteren, und enthält jeden Punkt, welcher durch die gegebenen Geraden von dem gegebenen Punkte harmonisch getrennt ist.

Durch eine Gerade und zwei ausserhalb derselben gegebene Punkte ist ein dritter Punkt bestimmt; derselbe liegt auf der Verbindungslinie der beiden ersteren, und durch ihn geht jede Gerade, welche durch die gegebenen Punkte von der gegebenen Geraden harmonisch getrennt ist.

Im Grunde ist dieser Doppelsatz als eine Wiederholung des vorhergehenden anzusehen, wenn letzterer auf Gebilde in der Ebene übertragen wird. Auf dem Satze links und dem nächsten Satze beruht die Lösung der in der Einleitung (S. 3, vergl. Fig. 1) berührten Aufgabe: Durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei Geraden eine dritte Gerade zu legen.

Nach dem bisher Entwickelten wird es Ihnen jetzt ein Leichtes sein, am vollständigen Viereck und Vierseit folgende Eigenschaften nachzuweisen (vergl. Fig. 15).

Im vollständigen ebenen Viereck sind je zwei Gegenseiten (wie $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$) harmonisch getrennt durch die beiden Punkte (A und C), in denen die übrigen Gegenseiten paarweise sich schneiden.

Im vollständigen ebenen Vierseit sind je zwei Gegenpunkte (wie A und C) harmonisch getrennt durch die beiden Geraden ($\overline{KM}$ und $\overline{LN}$), welche die übrigen Gegenpunkte paarweise verbinden.

Ich bemerke hierzu, dass in Fig. 15 nicht nur K, L, M und N als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks aufgefasst werden können, sondern auch $\overline{AL}$, $\overline{AN}$, $\overline{CL}$ und $\overline{CN}$ als Seiten eines vollständigen Vierseits, von welchem A und C, K und M, L und N die drei Paare von Gegenpunkten sind.

Anhang: Metrische Beziehungen an harmonischen Gebilden.

Ich darf die Lehre von den harmonischen Gebilden nicht abschliessen, ohne Ihnen, wie ich in der Einleitung versprach, die wichtigsten metrischen Beziehungen an denselben noch zu ent-

wickeln. Wir gelangen zu denselben am einfachsten mittelst des folgenden Satzes:

Wenn in einer Geraden zwei Punkte A *und* C *von einem dritten* B *gleichen Abstand haben, so sind sie durch diesen und den unendlich fernen Punkt* D *der Geraden harmonisch getrennt, oder* A B C D *sind vier harmonische Punkte.*

Nehmen wir nämlich in einer durch $\overline{ABC}$ gelegten Ebene zwei unendlich ferne Punkte K und M an (Fig. 17), und verbinden wir diese mit A und C (durch je zwei Parallelen), so schneiden sich die Verbindungslinien in zwei neuen Punkten L und N. Die Gerade $\overline{LN}$ geht dann als zweite Diagonale des Parallelogramms $ALCN$ durch den Halbirungspunkt B des Abschnittes AC. Von dem Viereck $KLMN$ schneiden sich also zwei Gegenseiten $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ in A, zwei andere $\overline{LM}$ und $\overline{NK}$ in C, die Diagonale $\overline{LN}$ geht durch B und die zweite Diagonale, nämlich die unendlich ferne Gerade $\overline{KM}$, durch D, so dass wirklich $ABCD$ vier harmonische Punkte sind.

Da vier harmonische Punkte $ABCD$, aus einem fünften S durch vier harmonische Strahlen projicirt werden, so folgt hieraus (Fig. 18):

„Zieht man durch die Spitze S eines Dreiecks ASC zwei Ge„rade, die eine d parallel und die andere b nach der Mitte der „Grundlinie AC, so sind dieselben durch die anstossenden „Seiten a und c des Dreiecks harmonisch getrennt."

Ist ASC gleichschenkelig, so steht b senkrecht auf $\overline{AC}$ und folglich auch auf d; auch werden die von a und c gebildeten Nebenwinkel durch b und d halbirt. Also:

„Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel sind durch die „Schenkel derselben harmonisch getrennt."

Eine Umkehrung dieses Satzes kann so ausgesprochen werden:

„Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei getrennte auf ein„ander senkrecht stehen, so halbiren sie die Winkel zwischen „den anderen beiden Strahlen."

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus folgendem umkehrbaren Satze (Fig. 18):

„Wird ein harmonischer Büschel $abcd$ durch eine Parallele u „zu einem seiner Strahlen geschnitten, so halbirt von den drei „Schnittpunkten mit den übrigen Strahlen der eine den Ab„schnitt zwischen den beiden anderen."

Die Schnittpunkte von u mit $abcd$ sind nämlich vier harmonische Punkte, und einer derselben liegt unendlich fern.

Diese Sätze, zu welchen sich ähnliche für harmonische Ebenen aufstellen lassen, können zur Lösung einer Reihe von Aufgaben benutzt werden. So z. B. lässt die Aufgabe:

„Zu drei Punkten oder Strahlen den vierten harmonischen zu „construiren"

eine viel einfachere Lösung zu, als diejenige mittelst des vollständigen Vierecks, sobald die Construction von Parallelen und von gleichen Abschnitten zugelassen wird. Denn soll zu den Strahlen b, c, d (Fig. 18) der vierte, von c harmonisch getrennte Strahl a gesucht werden, so schneiden wir b und c durch irgend eine Parallele u zu d in den Punkten B und C, und machen auf dieser $AB = BC$; der durch A gelegte Strahl a des Büschels bcd ist dann der gesuchte. Ist ferner zu den drei Punkten A, B, C (Fig. 19) der vierte, von B harmonisch getrennte Punkt D zu suchen, so tragen wir auf irgend einer durch B gelegten Geraden von B aus zwei gleiche Strecken A_1B und BC_1 ab, bestimmen den Schnittpunkt S der Geraden $\overline{AA_1}$ oder a und $\overline{CC_1}$ oder c, und ziehen durch diesen eine Parallele d zu $\overline{A_1BC_1}$, welche die Gerade $\overline{ABC}$ in dem gesuchten Punkte D schneidet. Denn da A_1, B, C_1 und der unendlich ferne Punkt von $\overline{A_1BC_1}$ vier harmonische Punkte sind, so muss $S\,(A_1BC_1D)$ oder $abcd$ ein harmonischer Büschel, und daher auch $ABCD$ als Schnitt desselben eine harmonische Punktreihe sein.

Wenn eine Strecke AC und deren Mittelpunkt B gegeben sind, so kann mittelst rein linearer Constructionen durch jeden vierten Punkt K (Fig. 20) eine Parallele zu $\overline{ABC}$ gelegt werden, wie folgt. Wir ziehen die Verbindungslinien $\overline{KA}$ und $\overline{KC}$, und schneiden diese in resp. L und N mittelst irgend einer durch B gehenden Geraden. Bestimmen wir dann den Schnittpunkt M von $\overline{CL}$ und $\overline{AN}$, so geht durch diesen die gesuchte Parallele. Denn als zweite Diagonale des Vierecks $KLMN$ schneidet $\overline{KM}$ die Gerade $\overline{ABC}$ in einem vierten, von B harmonisch getrennten Punkte, welcher aber unendlich fern liegt, weil B die Strecke AC halbirt. Wenn umgekehrt zwei Parallele gegeben sind, so kann jede auf einer derselben liegende Strecke durch lineare Constructionen halbirt werden. Wie diese Constructionen in der Feldmesskunst verwerthet werden können, wird Ihnen ohne Weiteres einleuchten.

Zwischen den Abschnitten, welche durch vier harmonische Punkte $A\,B\,C\,D$ auf einer Geraden gebildet werden, besteht eine interessante Proportion. Wir projiciren, um diese zu finden, die harmonischen Punkte durch irgend einen harmonischen Büschel $a\,b\,c\,d$ (Fig. 19), und legen sodann durch B eine Parallele zum Strahle d. Dann begegnet diese den Strahlen a und c in zwei Punkten A_1 und C_1, welche von B gleichen Abstand haben; zugleich entstehen zwei Paare ähnlicher Dreiecke, indem $A\,A_1\,B \sim A\,S\,D$ und $B\,C_1\,C \sim D\,S\,C$. Wir erhalten also die Proportionen:

$$\frac{A\,B}{A_1\,B} = \frac{A\,D}{S\,D} \text{ und } \frac{B\,C}{B\,C_1} = \frac{C\,D}{S\,D}.$$

Dividiren wir die erstere durch die letztere, und berücksichtigen, dass $A_1\,B = B\,C_1$ ist, so folgt:

$$\text{I} \ldots\ldots \frac{A\,B}{B\,C} = \frac{A\,D}{C\,D},$$

oder der Satz:

„Die Strecke $A\,C$ ist durch den in ihr gelegenen Punkt B in „demselben Verhältniss getheilt, wie durch den äusseren Punkt „D, welcher von B durch A und C harmonisch getrennt ist."

Dieser Satz wird gewöhnlich als Definition der harmonischen Punkte aufgestellt, und zum Ausgangspunkt der Lehre von den harmonischen Punkten gewählt. Es folgt daraus u. A., dass der äussere Punkt D über C hinaus liegt, wenn $A\,B > B\,C$ und folglich $A\,D > C\,D$ ist, dagegen über A hinaus, wenn $A\,B < B\,C$, dass also B und D immer zugleich einem der Punkte A und C näher liegen als dem anderen.

In obiger Proportion schreibt man gewöhnlich, weil die gleichen Strecken $C\,D$ und $D\,C$ in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, — $D\,C$ statt $C\,D$, so dass sie symmetrischer so lautet:

$$\frac{A\,B}{B\,C} = -\frac{A\,D}{D\,C}.$$

Ist M der Halbirungspunkt der Strecke $B\,D$, so kann die Gleichung I auch geschrieben werden:

$$\frac{A\,M - B\,M}{B\,M - C\,M} = \frac{A\,M + M\,D}{C\,M + M\,D},$$

oder wenn $B\,M$ statt $M\,D$ gesetzt wird:

$$\frac{A\,M - B\,M}{B\,M - C\,M} = \frac{A\,M + B\,M}{C\,M + B\,M}.$$

Durch Ausmultipliciren ergiebt sich hieraus nach sehr einfachen Reductionen:

$$\text{II} \ldots\ldots (BM)^2 = AM \,.\, CM,$$

oder der bemerkenswerthe Satz:

„BM (und ebenso DM) ist die mittlere Proportionale zwischen „AM und CM."

Auch dieser oft benutzte Satz kann als Definition der harmonischen Punkte gelten.

Legt man durch A und C (Fig. 19) irgend einen Kreis und an diesen durch M eine Tangente MT, so ist nach dem bekannten Satz über die Abschnitte von Kreissecanten:

$$AM \,.\, CM = (TM)^2,$$

und folglich $TM^2 = BM^2 = DM^2$. Der Berührungspunkt T der Tangente liegt also auf dem Kreise, welcher mit dem Radius $BM = MD$ um den Mittelpunkt M beschrieben wird; und dieser Kreis schneidet den anderen rechtwinklig in T, weil sein Radius MT auf seiner Tangente in T normal ist. Also:

„Alle Kreise der Ebene, welche durch zwei gegebene Punkte A „und C gehen, werden rechtwinklig geschnitten von jedem Kreise, „von welchem die Endpunkte eines Durchmessers DB harmo„nisch durch A und C getrennt sind."

Die Lehre von den harmonischen Punkten führt uns also mit Leichtigkeit zu Schaaren von Kreisen, die sich rechtwinklig schneiden, und ebenso kann sie zum Ausgangspunkt für die Untersuchung orthogonaler Kugelschaaren gewählt werden.

Die Umkehrung der Gleichung I, also die Gleichung $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$ lässt sich auch folgendermaassen schreiben.

$$\frac{AC - AB}{AB} = \frac{AD - AC}{AD} \quad \text{oder} \quad \frac{AB - AC}{AB} = \frac{AC - AD}{AD},$$

und gerade dieser letzten Gleichung verdanken die Punkte A, B, C, D den Namen „harmonische" Punkte. Nämlich, wie Ihnen bekannt sein wird, pflegt man von drei Zahlen β, γ, δ zu sagen, sie seien „in stetiger harmonischer Proportion" oder „harmonisch", wenn die Differenz der beiden ersten sich zu der ersten verhält, wie die Differenz der beiden letzten zur letzten, oder wenn:

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}.$$

Die obige Gleichung zwischen den Abschnitten AB, AC und AD aber hat ganz die Form dieser letzten Gleichung.

Durch Ausführung der Division ergiebt sich schliesslich noch die Gleichung:

$$1 - \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD} - 1,$$

welche auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\text{III} \ldots\ldots \frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}.$$

Sie werden diese sehr bemerkenswerthe Formel leicht selbst in Worte kleiden können; auch sie wird häufig zur Definition harmonischer Punkte benutzt.

Aehnliche Gleichungen könnte ich Ihnen entwickeln für die Winkel, welche vier harmonische Strahlen oder Ebenen mit einander bilden. Ich ziehe jedoch vor, dieselben gelegentlich im Anhange zum nächsten grösseren Abschnitte aufzustellen, da sie ohnehin keinen grossen Werth für uns haben.

Wollen Sie übrigens bemerken, dass in den metrischen Beziehungen der Gebilde das Gesetz der Reciprocität nicht mehr, oder doch nur in einzelnen Fällen zur Geltung kommt. Ein Grund für diese Thatsache ist, dass im Büschel kein Element existirt, welches in Bezug auf die Maassverhältnisse eine ähnliche ausgezeichnete Stellung einnähme, wie der unendlich ferne Punkt im geraden Gebilde; und im letzteren kennen wir wiederum keine Strecke, welche durch das Maass so definirt und ausgezeichnet werden könnte, wie im Büschel der rechte Winkel.

Fünfter Vortrag.

Projectivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Grundgebilden.

Im gegenwärtigen Vortrage will ich einen bereits früher ausgesprochenen Gedanken wieder aufnehmen und weiter ausführen, den Gedanken nämlich, zwei Grundgebilde auf einander zu „beziehen“, so dass jedem Element des einen ein Element des anderen entspricht und jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen. Als sehr einfache Arten, Grundgebilde der ersten Stufe auf einander zu beziehen, haben sich uns die folgenden dargeboten. Es sind auf einander bezogen:

1) ein Büschel und eine Punktreihe (Fig. 6), oder ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel, wenn jedes Element des letzteren Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des ersteren liegt;
2) zwei Punktreihen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind (Fig. 8);
3) zwei Strahlenbüschel, wenn sie Scheine einer und derselben Punktreihe (Fig. 7), oder Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels (oder beides) sind;
4) zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels sind.

Von zwei in dieser Weise auf einander bezogenen einförmigen Grundgebilden wollen wir nun sagen, sie seien „in perspectivischer Lage", oder kürzer, sie seien „perspectivisch"; so dass also von zwei ungleichartigen perspectivischen Grundgebilden das eine ein Schnitt des anderen ist, zwei gleichartige perspectivische Grundgebilde dagegen entweder Schnitte oder Scheine eines und desselben dritten Grundgebildes sind.

Werden zwei einförmige Grundgebilde auf ein und dasselbe dritte perspectivisch bezogen (z. B. zwei Punktreihen auf eine dritte), so sind sie auch auf einander bezogen, jedoch ohne im Allgemeinen perspectivische Lage zu haben. Wir gelangen so zu einer zweiten, der sogenannten „schiefen Lage" von zwei auf einander bezogenen Grundgebilden, welche wir aus der perspectivischen auch auf folgende Weise ableiten können. Nämlich wir können zwei perspectivische Grundgebilde gegen einander verschieben; dann bleibt jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des anderen Gebildes zugewiesen, aber die Gebilde verlieren im Allgemeinen ihre perspectivische Lage.

Wir können noch auf unzählig viele andere Arten zwei Grundgebilde auf einander beziehen, z. B. zwei Strahlenbüschel, indem wir sie als Scheine einer und derselben Curve auffassen. Die vorhin angegebene Art des Beziehens unterscheidet sich nun in einem wichtigen Punkte von allen übrigen, und zwar sowohl wenn die Gebilde in perspectivischer, als wenn sie in schiefer Lage sich befinden. Werden nämlich irgend vier harmonische Elemente aus dem einen der beiden Gebilde herausgegriffen, so entsprechen diesen offenbar wieder vier harmonische Elemente in dem anderen Gebilde, weil ja Scheine und Schnitte von harmonischen Gebilden wieder harmonische Gebilde sind. Diese Eigenthümlich-

keit findet bei anderen Arten des Beziehens im Allgemeinen nicht statt, und wir werden so dazu geführt, folgende Definition aufzustellen:

Zwei Grundgebilde heissen zu einander projectivisch verwandt oder kurz projectivisch, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen entsprechen.

Zwei perspectivische einförmige Grundgebilde sind demnach auch projectivisch; sie sind nur noch ausgezeichnet durch ihre besondere gegenseitige Lage. Die Ausdrücke „conform" und „homographisch", welche Paulus und Chasles gebrauchen, sind gleichbedeutend mit projectivisch. v. Staudt hat für „projectivisch" das Zeichen $\overline{\wedge}$ eingeführt.

Aus der Erklärung der projectivischen Verwandtschaft folgt sofort:

Wenn zwei Gebilde zu einem dritten projectivisch sind, so sind sie auch zu einander projectivisch.

Sind z. B. zwei Punktreihen zu einer und derselben dritten perspectivisch, so sind sie zu einander projectivisch, haben aber nur in besonderen Fällen perspectivische Lage. Das Gleiche gilt von beliebigen Grundgebilden erster Stufe.

Zwei gleichartige projectivische Grundgebilde können auch „in einander liegen", das heisst denselben Träger haben. Zwei projectivische Ebenenbüschel z. B. können mit den Axen auf einander gelegt werden, und ebenso können zwei projectivische Punktreihen in derselben Geraden liegen, so dass jeder Punkt der Geraden zweimal gedacht werden muss. Für das Folgende ist nun die Untersuchung von grosser Wichtigkeit, wie viele Elemente zwei projectivische einförmige Grundgebilde, welche in einander liegen, „entsprechend gemein" haben, d. h. wie oft ein Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des anderen zusammenfällt. Dass zunächst der Fall möglich ist, in welchem sie ein oder zwei Elemente entsprechend gemein haben, ergiebt sich aus folgendem Doppelsatze:

Sind in einer Ebene zwei Strahlenbüschel S_1 und S_2 (Fig. 21) gegeben, welche Scheine einer und derselben Punktreihe u, also perspectivisch sind, und schneiden wir dieselben durch

Sind in einer Ebene zwei Punktreihen u_1 und u_2 (Fig. 22) gegeben, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels S, also perspectivisch sind, und projiciren wir dieselben aus

eine Gerade v, so erhalten wir in dieser zwei projectivische Punktreihen u_1 und u_2, welche die beiden Schnittpunkte von v mit u und mit $\overline{S_1 S_2}$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Punkte fallen zusammen, wenn $\overline{S_1 S_2}$ durch uv geht.

einem Punkte T der Ebene, so wird dieser der Mittelpunkt von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, welche die beiden Verbindungslinien von T mit S und mit $u_1 u_2$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Strahlen fallen zusammen, wenn $u_1 u_2$ auf $\overline{ST}$ liegt.

Zur Erläuterung füge ich hinzu, dass links zwei Punkte A_1 und A_2 von resp. u_1 und u_2 einander entsprechen, wenn $\overline{S_1 A_1}$ und $\overline{S_2 A_2}$ in einem Punkte A von u sich schneiden. Den Schnittpunkt uv haben daher die drei Punktreihen u, u_1 und u_2 entsprechend gemein, während u_1 und u_2 auch den Schnittpunkt von v mit dem gemeinsamen Strahl $\overline{S_1 S_2}$ der Büschel S_1 und S_2 entsprechend gemein haben.

Wird von zwei projectivischen Punktreihen u, u_1 die eine u durch stetige Bewegung eines Punktes P beschrieben, so durchläuft zugleich der entsprechende Punkt P_1 von u_1 diese andere Punktreihe, wenn P und P_1 beständig homologe Punkte bleiben. Nun können aber, wenn u und u_1 auf derselben Geraden liegen, die Punkte P und P_1 sich entweder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne bewegen (Fig. 27 und 28). Im ersteren Falle (Fig. 28) nennen wir die Punktreihen „einstimmig“, im letzteren (Fig. 27) „entgegengesetzt projectivisch.“ Ebenso nennen wir zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1, welche concentrisch und in derselben Ebene liegen (Fig. 29 und 30), oder zwei projectivische Ebenenbüschel, welche dieselbe Axe haben, „einstimmig“ (Fig. 30) oder „entgegengesetzt projectivisch“ (Fig. 29), jenachdem zwei homologe Elemente, indem sie dieselben beschreiben, sich in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne drehen. In entgegengesetzt projectivischen Gebilden erster Stufe (Fig. 27 und 29) müssen die beiden sich entsprechend bewegenden Elemente nothwendig zweimal zusammenfallen; es ergiebt sich:

„Entgegengesetzt projectivische Grundgebilde erster Stufe haben „allemal zwei Elemente entprechend gemein; durch diese sind „je zwei andere homologe Elemente von einander getrennt.“

Dagegen haben einstimmig projectivische Gebilde nur dann zwei Elemente entsprechend gemein, wenn eine Strecke (resp. ein Winkel) AB des einen ganz in der entsprechenden Strecke (resp.

dem entsprechenden Winkel) des anderen liegt (Fig. 28); sie haben in besonderen Fällen nur ein, häufig (Fig. 30) gar kein Element entsprechend gemein. — Zwei projectivische Punktreihen u, u_1, welche drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben, müssen wegen des vorhergehenden Satzes einstimmig projectivisch sein.

Wir können nunmehr den folgenden Fundamentalsatz der Geometrie der Lage beweisen:

Wenn zwei einförmige projectivische Grundgebilde drei Elemente A, B, C *entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, sind also identisch.*

Sind nämlich zunächst die projectivischen Grundgebilde zwei Punktreihen u und u_1 (Fig. 23), so muss jeder Punkt, welcher von einem der entsprechend gemeinschaftlichen Punkte A, B, C durch die beiden anderen harmonisch getrennt ist, mit seinem entsprechenden zusammenfallen, weil derselbe völlig bestimmt ist und weil vier harmonischen Punkten von u allemal vier harmonische Punkte von u_1 entsprechen sollen (Definition). Gesetzt nun, es gebe auf derjenigen Strecke AB, welche den Punkt C nicht enthält, einen Punkt P von u, welcher mit dem entsprechenden Punkte P_1 von u_1 nicht zusammenfällt. Lassen wir dann P im Sinne ABC die Punktreihe u durchlaufen, so beschreibt P_1 die u_1 in demselben Sinne und muss sich entweder in B oder vor B in einem Punkte B' mit P vereinigen. Bewegt sich P im entgegengesetzten Sinne CBA, so muss auch P_1 sich im Sinne CBA bewegen und entweder in A oder vor A in einem Punkte A' mit P zusammenfallen. Wir erhalten auf diese Weise eine Strecke $A'B'$, die entweder gleich AB oder ein Theil von AB ist und von welcher kein Punkt, ausgenommen die beiden Endpunkte A' und B', mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Das ist aber unmöglich, weil dem Obigen zufolge derjenige Punkt, welcher vom Punkte C durch A' und B' harmonisch getrennt ist, mit seinem entsprechenden zusammenfallen muss. Es folgt daraus, dass die Punktreihen u und u_1 jeden Punkt der Strecke AB gemein haben müssen, eben deshalb aber auch jeden anderen Punkt Q der Geraden, weil Q durch A und B von einem Punkte der Strecke AB harmonisch getrennt ist.

Für zwei projectivische Strahlen- oder Ebenenbüschel, welche drei Elemente entsprechend gemein haben, können wir den Satz entweder ganz analog beweisen; oder noch einfacher, wir führen diesen Fall dadurch auf den vorigen zurück, dass wir

durch eine und dieselbe Gerade die Büschel in zwei Punktreihen schneiden. Die letzteren sind dann auch projectivisch und haben drei und folglich alle ihre Elemente entsprechend gemein, woraus das Gleiche für die Büschel folgt.

Zwei projectivische einförmige Grundgebilde können also höchstens zwei Elemente entsprechend gemein haben, wenn nicht jedes Element des einen mit dem entsprechenden Elemente des anderen zusammenfallen soll. Eine andere wichtige Folgerung aus unserem Fundamentalsatze ist:

„Wenn eine Punktreihe zu einem Büschel, oder ein Strahlen-
„büschel zu einem Ebenenbüschel projectivisch ist, und drei Ele-
„mente des ersteren Gebildes in den ihnen entsprechenden Ele-
„menten des letzteren liegen, so ist das erstere Gebilde ein
„Schnitt des letzteren."

Dasselbe hat nämlich mit demjenigen Schnitte des letzteren, welchen der Träger des ersteren Gebildes erzeugt, drei und folglich alle seine Elemente entsprechend gemein, ist also mit ihm identisch.

Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 25), welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, den Strahl a oder a_1, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine einer und derselben Punktreihe u und somit perspectivisch. Denn verbinden wir die Punkte B und C, in welchen irgend zwei Strahlen b und c des Büschels S von den ihnen resp. entsprechenden Strahlen b_1 und c_1 von S_1 geschnitten werden, durch eine Gerade $\overline{BC}$ oder u, so sind die beiden Punktreihen, in welchen u die Büschel S und S_1 schneidet, identisch, weil sie projectivisch sind und die drei Punkte ua, ub und uc oder A, B und C entsprechend gemein haben.

Wenn zwei projectivische Punktreihen u und u_1 (Fig. 24), welche sich schneiden, ihren Schnittpunkt A oder A_1 entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels S und somit perspectivisch. Denn verbinden wir irgend zwei Punkte B und C von u mit den ihnen resp. entsprechenden Punkten B_1 und C_1 von u_1 durch die Geraden b und c, und bezeichnen wir mit S den Schnittpunkt dieser Geraden, so sind die beiden Strahlenbüschel, durch welche aus S die Punktreihen u und u_1 projicirt werden, identisch, weil sie projectivisch sind und die drei Strahlen $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$ oder a, b und c entsprechend gemein haben.

Diesem Doppelsatze steht der folgende aus der Geometrie des Strahlenbündels zur Seite:

Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, die Verbindungsebene dieser Axen entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels und daher perspectivisch. Verbinden wir nämlich irgend zwei Schnittlinien homologer Ebenen mit einander, und schneiden wir durch die Verbindungsebene die beiden Ebenenbüschel, so erhalten wir zwei projectivische Strahlenbüschel, welche drei Strahlen entsprechend gemein haben und folglich identisch sind.

Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel, welche concentrisch sind, aber in verschiedenen Ebenen liegen, die Schnittlinie dieser Ebenen entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels und daher perspectivisch. Projiciren wir nämlich aus der Schnittlinie von irgend zwei Verbindungsebenen homologer Strahlen die beiden Strahlenbüschel, so erhalten wir zwei projectivische Ebenenbüschel, welche drei Ebenen entsprechend gemein haben und folglich identisch sind.

Die Beweise dieses und des vorhergehenden Doppelsatzes sind, wie Sie bemerkt haben werden, einander ganz analog; auch der folgende Satz wird auf die nämliche Art bewiesen.

Zwei projectivische, aber nicht concentrische Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 25) haben perspectivische Lage, wenn von den Schnittpunkten ihrer homologen Strahlen irgend drei in einer Geraden u liegen. Denn die projectivischen Punktreihen, in welchen die beiden Strahlenbüschel von der Geraden u geschnitten werden, haben jene drei Punkte B, C, D und folglich alle ihre Punkte entsprechend gemein; alle Schnittpunkte homologer Strahlen der beiden Büschel liegen folglich auf der Geraden u.

Zwei projectivische, aber nicht auf einander liegende, Punktreihen u und u_1 (Fig. 24) haben perspectivische Lage, wenn von den Verbindungslinien ihrer homologen Punkte irgend drei durch einen Punkt S gehen. Denn die projectivischen Strahlenbüschel, durch welche die beiden Punktreihen aus dem Punkte S projicirt werden, haben jene drei Strahlen $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ und folglich alle ihre Strahlen entsprechend gemein; alle Verbindungslinien homologer Punkte von u und u_1 gehen folglich durch S.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, die analogen Sätze über Strahlen- und Ebenenbüschel im Strahlenbündel aufzustellen und zu beweisen.

Wenn zwei auf einander bezogene Strahlenbüschel in einer Ebene, aber nicht concentrisch liegen, so folgen die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen stetig auf einander; denn wenn ein Strahl durch Drehung um den Mittelpunkt den einen Büschel beschreibt, so dreht sich der entsprechende Strahl stetig mit und beschreibt den anderen Büschel, und der Schnittpunkt der beiden Strahlen beschreibt folglich eine Linie. Sind nun die beiden Strahlenbüschel projectivisch, ohne jedoch perspectivische Lage zu haben, so liegen alle Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen in einer Curve, welche dem obigen Satze zufolge mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Wir nennen dieselbe wegen dieser Eigenthümlichkeit eine „Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung"; von ihr soll das gerade Gebilde, wo es nöthig erscheint, durch den Namen „Punktreihe erster Ordnung" unterschieden werden.

Liegen zwei projectivische Punktreihen schief in einer Ebene, so bilden ebenso die sämmtlichen Verbindungslinien von je zwei einander entsprechenden Punkten derselben eine stetige Aufeinanderfolge von Strahlen, von welchen durch keinen Punkt mehr als zwei gehen. Die Gesammtheit dieser Verbindungslinien bezeichnen wir als einen „Strahlenbüschel zweiter Ordnung", die gewöhnlichen Strahlenbüschel dagegen, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, als Strahlenbüschel „erster Ordnung".

Die Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung sind also folgendermaassen durch ihre Entstehungsart definirt:

Zwei projectivische Strahlenbüschel (erster Ordnung), die schief in einer Ebene liegen, erzeugen eine Curve oder Punktreihe II. Ordnung, indem jeder Strahl des einen den entsprechenden Strahl des anderen Büschels in einem Punkte dieser Curve schneidet.

In keiner Geraden liegen mehr als zwei Punkte einer Curve II. Ordnung.

Zwei projectivische Punktreihen (erster Ordnung), die schief in einer Ebene liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel II. Ordnung, indem jeder Punkt der einen den entsprechenden Punkt der anderen Punktreihe durch einen Strahl dieses Büschels projicirt.

Durch keinen Punkt gehen mehr als zwei Strahlen eines Büschels II. Ordnung.

Ganz analoge Gebilde II. Ordnung werden durch schief liegende Strahlen- und Ebenenbüschel im Strahlenbündel erzeugt. Ich werde in den nächsten Vorträgen alle diese neuen Gebilde näher untersuchen.

Zu Constructionen der Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung gelangen wir, indem wir den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Zwei einförmige Grundgebilde können stets in solcher Weise projectivisch auf einander bezogen werden, dass man irgend drei Elementen des einen drei beliebige Elemente des anderen Grundgebildes zuweist; zu jedem vierten Elemente des einen kann dann das entsprechende des anderen Gebildes eindeutig bestimmt werden.

Wir können den Beweis dieses Satzes direct aus der Erklärung der projectivischen Verwandtschaft schöpfen, und aus dem Satze, dass durch drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes ein einziges viertes bestimmt ist, welches von einem der ersteren durch die übrigen beiden harmonisch getrennt ist. Daraus folgt durch ähnliche Betrachtungen wie oben (S. 45), dass durch die drei gegebenen Paare homologer Elemente unendlich viele solche Paare einander zugewiesen sind, und dass in dem einen Gebilde kein Element vorkommt, welchem dadurch nicht ein Element des anderen zugewiesen wäre.

Ich will jedoch den Beweis noch auf andere Weise führen; aber nur für zwei Punktreihen, weil alle anderen Fälle sich auf diesen einen leicht zurückführen lassen. Ist nämlich eines oder jedes der beiden Grundgebilde ein Büschel, so können wir für dasselbe den Schnitt mit einer Geraden, also eine Punktreihe, substituiren.

Sollen nun zunächst zwei in einer Ebene liegende Punktreihen u und u_1 (Fig. 24) projectivisch so auf einander bezogen werden, dass sie den Schnittpunkt A oder A_1 ihrer Träger entsprechend gemein haben, und dass den Punkten B und C von u die resp. Punkte B_1 und C_1 von u_1 entsprechen, so muss die eine Punktreihe eine Projection der anderen sein aus dem Schnittpunkte S von $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$. Irgend einem vierten Punkte D von u entspricht also in u_1 seine Projection D_1 aus dem Punkte S.

Sollen ferner zwei Punktreihen u und u_1 (Fig. 26), die nicht in derselben Geraden liegen, so auf einander projectivisch bezogen werden, dass den Punkten A, B, C von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von u_1 entsprechen, so nehmen wir auf einer Verbindungs-

linie von zwei einander entsprechenden Punkten, z. B. auf $\overline{A A_1}$, einen von A und A_1 verschiedenen Punkt S an, und legen durch A_1 eine von u_1 und $\overline{A A_1}$ verschiedene Gerade u_2, welche die Gerade u schneidet. Projiciren wir dann die Punktreihe u auf u_2 aus dem Mittelpunkte S, und sind A_2, B_2, C_2 die Projectionen von A, B, C, so ist unsere Aufgabe offenbar auf die vorhergehende zurückgeführt. Denn wir haben nur noch u_1 und u_2 so auf einander projectivisch zu beziehen, dass sie ihren Schnittpunkt A_1 oder A_2 entsprechend gemein haben und den Punkten B_1 und C_1 von u_1 die resp. Punkte B_2 und C_2 von u_2 entsprechen. Die Punktreihen u und u_1 können daher als Projectionen einer und derselben dritten Punktreihe u_2 angesehen werden. Um zu irgend einem Punkte D von u den entsprechenden Punkt D_1 in u_1 zu bestimmen, suchen wir zunächst seine Projection D_2 auf u_2, mit deren Hülfe wir dann nach den Regeln des schon erledigten Falles D_1 finden.

Sollen endlich zwei in einer und derselben Geraden liegende Punktreihen u und u_1 (Fig. 27 und 28) projectivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von u_1 entsprechen, so führen wir diesen Fall auf den vorigen dadurch zurück, dass wir u_1 auf irgend eine andere Gerade u_2 projiciren. Fallen irgend zwei einander entsprechende Punkte, z. B. A und A_1, auf einander, so legen wir u_2 am zweckmässigsten durch einen solchen Doppelpunkt, indem dann der vorliegende Fall sogleich auf den ersten zurückgeführt ist.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich der Satz: Zwei projectivische einförmige Grundgebilde können immer als erstes und letztes in einer Reihe von Gebilden betrachtet werden, deren jedes zu dem folgenden und zu dem vorhergehenden perspectivisch liegt. Zwei projectivische Punktreihen z. B. können angesehen werden als das erste und letzte von vier oder weniger Punktreihen, von denen jede eine Projection der benachbarten ist. Dieser Satz erklärt auch den Ausdruck „projectivisch“.

Zugleich ergiebt sich eine Reihe anscheinend verwickelter Sätze auf sehr einfache Weise. Ich nenne von denselben nur die folgenden:

Drehen sich die Seiten a_1, a_2, ..., a_n eines veränderlichen einfachen n ecks der Reihe nach um n feste Punkte S_1, S_2, ...,

Durchlaufen die Eckpunkte A_1, A_2, ..., A_n eines veränderlichen einfachen n ecks der Reihe nach n feste Gerade u_1, u_2, ...,

S_n, während $n-1$ Eckpunkte a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{n-1}a_n$ desselben sich auf den resp. festen Geraden u_1, u_2, ..., u_{n-1} bewegen, so beschreibt der letzte Eckpunkt a_na_1 und jeder andere Schnittpunkt der Seiten des $n$ecks entweder eine Curve II. Ordnung oder eine Gerade, und zwar eine Gerade u. A. dann, wenn die festen Drehpunkte S_1, S_2, ..., S_n alle auf einer Geraden g liegen. — Die Seiten a_1, a_2, ..., a_n beschreiben nämlich um S_1, S_2, ..., S_n Strahlenbüschel, von denen jeder zu dem folgenden perspectivisch liegt, indem die Punktreihen u_1, u_2, ..., u_{n-1} die resp. perspectivischen Durchschnitte bilden. Folglich sind je zwei dieser Büschel, und namentlich der erste und der letzte, projectivisch, und erzeugen eine Curve II. Ordnung, wenn sie nicht etwa perspectivisch liegen. Dieser letztere Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Mittelpunkte der Büschel auf einer Geraden g liegen; denn diese ist dann sämmtlichen Büscheln entsprechend gemein, weil bei der Bewegung des $n$ecks einmal alle Seiten mit g zusammenfallen.

u_n, während $n-1$ Seiten $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ desselben sich um die resp. festen Punkte S_1, S_2, ..., S_{n-1} drehen, so beschreibt die letzte Seite $\overline{A_nA_1}$ und ebenso jede Diagonale des $n$ecks entweder einen Strahlenbüschel II. Ordnung, oder sie dreht sich um einen festen Punkt, und zwar tritt der letztere Fall u. A. dann ein, wenn die Geraden u_1, u_2, ..., u_n sich alle in einem Punkte schneiden. — Die Eckpunkte A_1, A_2. ...., A_n beschreiben nämlich in u_1, u_2, ..., u_n Punktreihen, von denen jede zu der folgenden perspectivisch liegt, indem S_1, S_2, ..., S_{n-1} die resp. perspectivischen Centra bilden. Folglich sind je zwei dieser Punktreihen, und namentlich die erste und die letzte, projectivisch, und erzeugen einen Büschel II. Ordnung, wenn sie nicht etwa perspectivisch liegen. Dieser letztere Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Geraden u_1, u_2, ..., u_n sich in einem Punkte P schneiden; denn diesen haben sie dann alle entsprechend gemein, weil bei der Bewegung des $n$ecks einmal alle Eckpunkte mit P zusammenfallen.

Diese Sätze, von welchen der eine (links) die Verallgemeinerung eines Theorems von Maclaurin und Braikenridge ist und der andere (rechts) von Poncelet herrührt, bieten uns ein Mittel dar, um beliebig viele Punkte einer Curve oder Strahlen eines Büschels II. Ordnung durch lineare Constructionen zu finden. Für $n = 3$ werden diese Constructionen natürlich am einfachsten.

Anhang: Metrische Beziehungen projectivischer Grundgebilde der ersten Stufe.

Zwischen den Winkeln und Strecken, welche durch je vier homologe Elemente projectivischer Grundgebilde begrenzt werden, besteht eine wichtige Proportion, die ich Ihnen zum Schluss noch entwickeln will. Wir gehen aus von einem Strahlenbüschel S (Fig. 24 und 25) und einer zu ihm perspectivischen Punktreihe u. Vier beliebige Strahlen a, b, c, d von S gehen durch ihre entsprechenden Punkte A, B, C, D von u. Die Dreiecke nun, welche von u und jenen Strahlen begrenzt werden, und deren gemeinschaftliche Spitze S ist, haben gleiche Höhe; ihre Flächen verhalten sich daher, wie die in u liegenden Grundlinien, so dass z. B.

$$\frac{\Delta\, ASB}{\Delta\, ASD} = \frac{AB}{AD} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\, CSB}{\Delta\, CSD} = \frac{CB}{CD}.$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist aber gleich dem halben Product aus zwei Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels. Bezeichnen wir also allgemein mit $(p\,q)$ den Winkel zwischen zwei Strahlen p und q, so erhalten wir für die vier Dreiecke die Werthe:

$$\Delta\, ASB = \tfrac{1}{2}\, AS \,.\, SB \,.\, \sin(a\,b);$$
$$\Delta\, ASD = \tfrac{1}{2}\, AS \,.\, SD \,.\, \sin(a\,d);$$
$$\Delta\, CSB = \tfrac{1}{2}\, CS \,.\, SB \,.\, \sin(c\,b);$$
$$\Delta\, CSD = \tfrac{1}{2}\, CS \,.\, SD \,.\, \sin(c\,d);$$

und wenn diese Werthe in obige Proportionen eingesetzt und die gemeinschaftlichen Factoren in Zähler und Nenner gegen einander aufgehoben werden, so folgt:

$$\frac{SB \,.\, \sin(a\,b)}{SD \,.\, \sin(a\,d)} = \frac{AB}{AD} \quad \text{und} \quad \frac{SB \,.\, \sin(c\,b)}{SD \,.\, \sin(c\,d)} = \frac{CB}{CD}.$$

Dividiren wir endlich die erste dieser Gleichungen durch die zweite, und heben links $\frac{SB}{SD}$ gegen $\frac{SB}{SD}$ fort, so ergiebt sich die gesuchte Proportion in folgender Form:

$$\text{I} \ldots \quad \frac{\sin(a\,b)}{\sin(a\,d)} : \frac{\sin(c\,b)}{\sin(c\,d)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}.$$

Jedes Glied dieser Proportion ist ein Verhältniss; z. B. $\frac{CB}{CD}$ ist das Verhältniss der beiden Strecken, in welche die Strecke BD durch den Punkt C (der in Fig. 24 ausserhalb BD liegt) getheilt wird, und $\frac{\sin(c\,b)}{\sin(c\,d)}$ ist das Sinusverhältniss der beiden Winkel, in welcher der Winkel $(b\,d)$ durch den Strahl c getheilt wird. Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung ist also ein Verhältniss zwischen zwei Verhältnissen, oder ein

sogenanntes „Doppelverhältniss“. Sie erkennen leicht die besondere Art, in welcher die vorliegenden Doppelverhältnisse gebildet sind. Das Doppelverhältniss rechts zwischen den von A, B, C und D begrenzten Strecken z. B. wird dadurch gewonnen, dass wir die Verhältnisse, nach welchen die von zweien dieser Punkte begrenzte Strecke BD von jedem der beiden übrigen Punkte getheilt wird, in einander dividiren; und ganz analog ist das andere Doppelverhältniss zwischen den Sinus zusammengesetzt. Auch folgt aus der Ableitung unserer Gleichung, dass es gleichgültig ist, welche Strecke und welchen Winkel wir als getheilt ansehen, wenn nur beide Doppelverhältnisse in gleicher Weise gebildet werden; denn eine andere Wahl unserer vier Dreiecke würde uns zu folgender Gleichung geführt haben:

$$\frac{\sin(a\,d)}{\sin(a\,c)} : \frac{\sin(b\,d)}{\sin(b\,c)} = \frac{AD}{AC} : \frac{BD}{BC},$$

und es kann Ihnen nicht schwer fallen, noch mehr ähnliche Gleichungen für dieselben Punkte und Strahlen aufzustellen.

Bemerkenswerth ist nun, dass diese Gleichungen gültig bleiben, wenn wir die Punktreihe u in irgend eine andere schiefe Lage gegen den Strahlenbüschel bringen. Auch werden auf jeder anderen Geraden u_1 (Fig. 24), welche in A_1, B_1, C_1, D_1 die resp. Strahlen a, b, c, d schneidet, Strecken gebildet, für welche die mit I analoge Gleichung gilt:

$$\text{II} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\sin(a\,b)}{\sin(a\,d)} : \frac{\sin(c\,b)}{\sin(c\,d)} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1};$$

nnd ebenso werden A, B, C und D aus jedem von S verschiedenen Punkte S_1 (Fig. 25) durch vier solche Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 projicirt, dass

$$\text{III} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1d_1)} : \frac{\sin(c_1b_1)}{\sin(c_1d_1)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}.$$

Ein Doppelverhältniss obiger Art zwischen vier Elementen eines geraden Gebildes oder eines Strahlenbüschels ändert also seinen Werth nicht, wenn jene Elemente durch die entsprechenden Elemente eines perspectivischen geraden Gebildes oder Büschels ersetzt werden.

Da wir nun zwei projectivische einförmige Grundgebilde immer als erstes und letztes von einer Reihe von Grundgebilden ansehen können, deren jedes zum folgenden perspectivisch liegt, so folgt:

Sind zwei Grundgebilde projectivisch, so ist jedes Doppelverhältniss zwischen irgend vier Elementen des einen gleich dem

analogen Doppelverhältniss zwischen den entsprechenden vier Elementen des anderen Grundgebildes.

Sind z. B. u und u_1 zwei zu einander projectivische Punktreihen, und entsprechen den Punkten A, B, C, D von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 von u_1, so besteht zwischen den Abschnitten, welche von diesen Punkten gebildet werden, die Proportion:

$$\text{IV} \ldots\ldots \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}.$$

Steiner hat den obigen Satz bei der Definition der projectivischen Verwandtschaft benutzt, und auf diese Weise seiner „systematischen Entwickelung etc." die Rechnung mit Doppelverhältnissen zu Grunde gelegt. Der Satz gilt auch für Ebenenbüschel; denn die Winkel zwischen den Ebenen eines solchen werden in einem Strahlenbüschel gemessen, dessen Ebene zur Axe des Ebenenbüschels senkrecht steht, und welcher zu dem letzteren perspectivisch ist.

Hier ist schliesslich noch der Ort, um die metrischen Beziehungen der Winkel eines harmonischen Strahlen- oder Ebenenbüschels anzugeben. Sind a, b, c, d dessen Elemente und A, B, C, D (Fig. 19) die vier harmonischen Punkte, in welchen sie von irgend einer Geraden geschnitten werden, so ergiebt sich für letztere $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ (S. 39), und daher aus I die gesuchte Beziehung:

$$\text{V} \ldots\ldots \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} = \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)}.$$

Sechster Vortrag.

Curven, Büschel und Kegelflächen zweiter Ordnung.

Im letzten Vortrage sind wir zu folgenden wichtigen Ergebnissen gelangt:

Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel in einer Ebene, aber weder concentrisch noch perspectivisch liegen, so bilden

Wenn zwei projectivische Punktreihen in einer Ebene, aber weder in derselben Geraden noch perspectivisch liegen, so bilden

die sämmtlichen Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen eine Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung, die mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

die sämmtlichen Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der mit keinem Büschel I. Ordnung mehr als zwei Strahlen gemein hat.

Um Ihnen von diesen Gebilden zweiter Ordnung sogleich eine bestimmte Vorstellung zu verschaffen, führe ich schon jetzt an, dass die Curven II. Ordnung identisch sind mit den Kegelschnitten, also auch erhalten werden, wenn ein gewöhnlicher Kreiskegel durch eine Ebene geschnitten wird. Ein Strahlenbüschel II. Ordnung aber besteht aus den sämmtlichen Tangenten eines solchen Kegelschnittes. Den Beweis für diese Behauptungen werde ich später führen.

Obigen beiden Sätzen aus der ebenen Geometrie entsprechen die folgenden aus der Geometrie des Strahlenbündels:

Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, nicht perspectivisch liegen, so bilden die sämmtlichen Schnittlinien ihrer homologen Ebenen eine Kegelfläche II. Ordnung, welche mit keiner Ebene mehr als zwei dieser Schnittlinien gemein hat. Der Schnittpunkt der Axen, durch welchen alle Strahlen der Kegelflächen hindurchgehen, heisst der „Mittelpunkt“ der Kegelfläche.

Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel, deren Ebenen sich schneiden, concentrisch, aber nicht perspectivisch liegen, so bilden die sämmtlichen Verbindungsebenen ihrer homologen Strahlen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher mit keinem Ebenenbüschel I. Ordnung mehr als zwei Ebenen gemein hat. Das Centrum der Strahlenbüschel, durch welches alle Ebenen des Büschels II. Ordnung hindurchgehen, heisst der „Mittelpunkt“ dieses Ebenenbüschels.

Die Kegelfläche und den Ebenenbüschel II. Ordnung können Sie mittelst der Curve und des Strahlenbüschels II. Ordnung erzeugen, indem Sie diese aus irgend einem nicht in ihrer Ebene gelegenen Punkte projiciren. Denn die beiden projectivischen Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 31 und 33), durch welche eine Curve II. Ordnung erzeugt wird, werden aus einem solchen Punkte O (z. B. aus Ihrem Auge) durch zwei projectivische Ebenenbüschel projicirt, welche eine durch die Curve gehende Kegelfläche II. Ord-

nung mit dem Mittelpunkt O erzeugen. Und ebenso werden aus O die beiden projectivischen Punktreihen u und u_1 (Fig. 32), welche einen Strahlenbüschel II. Ordnung erzeugen, durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt, und diese wiederum erzeugen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, der durch jenen Strahlenbüschel geht und O zum Mittelpunkte hat. Umgekehrt wird jede Kegelfläche II. Ordnung von einer nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten; denn die beiden projectivischen Ebenenbüschel, welche die Kegelfläche erzeugen, werden in zwei projectivischen Strahlenbüscheln geschnitten, welche jene Schnittcurve erzeugen. Wenn also mehr als zwei Strahlen der Kegelfläche in einer Ebene lägen, so würden auch mehr als zwei Punkte dieser Schnittcurve in einer Geraden liegen, was nach dem zu Anfang wiederholten Satz unmöglich ist. Analoges werden Sie leicht von den Ebenenbüscheln II. Ordnung beweisen können. Zugleich erkennen Sie die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jede Curve und jeder Strahlenbüschel II. Ordnung wird aus einem nicht in derselben Ebene gelegenen Punkte durch eine Kegelfläche resp. einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.

Jede Kegelfläche und jeder Ebenenbüschel II. Ordnung wird von einer nicht durch den Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve resp. einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten.

Sie ersehen hieraus, dass alle Resultate, die wir für die ebenen Gebilde II. Ordnung gewinnen, sich sofort durch Projiciren auf die analogen Gebilde im Strahlenbündel übertragen lassen. Ich beschränke mich daher fürs Erste auf die Untersuchung der Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung, und schicke folgende Bemerkung voraus:

Die Curve k II. Ordnung, welche durch zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 31) erzeugt wird, geht durch die Mittelpunkte der letzteren. Denn dem Strahle $\overline{SS_1}$ oder p des Büschels S, d. h. der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, entspricht, weil die Büschel nicht perspectivisch liegen, im Büschel S_1 ein von $\overline{S_1S}$

Der Strahlenbüschel K II. Ordnung, welcher durch zwei projectivische Punktreihen u und u_1 (Fig. 32) erzeugt wird, enthält auch die Geraden u und u_1, in welchen die Punktreihen liegen. Denn dem Punkte uu_1 oder P der Punktreihe u, d. h. dem Schnittpunkt beider Geraden, entspricht, weil die Punktreihen nicht perspectivisch liegen, in u_1

verschiedener Strahl p_1. Der Schnittpunkt von p und p_1, nämlich S_1, gehört also der Curve k an, und ebenso S.

ein von $u_1 u$ verschiedener Punkt P_1. Die Verbindungslinie $\overline{PP_1}$ oder u_1 gehört also dem Büschel K an, und ebenso u.

Links ist p_1 (Fig. 31) der einzige durch S_1 gehende Strahl, welcher mit der Curve k nur einen einzigen Punkt, nämlich S_1, gemein hat. Jeder von p_1 verschiedene Strahl a_1 des Büschels S_1 wird von dem ihm entsprechenden und von p verschiedenen Strahl a in einem zweiten, nicht mit S_1 identischen Punkte der Curve k geschnitten. Wir sagen deshalb, der Strahl p_1 „berühre" in S_1 die Curve k, oder er sei eine „Tangente" von k. — Ebenso ist rechts (Fig. 32) P_1 der einzige Punkt von u_1, durch welchen nur ein einziger Strahl von K, nämlich u_1 selbst, hindurchgeht. Denn durch jeden anderen Punkt A_1 von u_1 geht noch ein zweiter Strahl $\overline{A_1 A}$ von K, weil A nicht mit P, und also $\overline{A_1 A}$ nicht mit u_1 zusammenfallen kann. Wir nennen deshalb P_1 einen „Berührungspunkt" des Büschels K im Strahle u_1, und können daher den Satz aufstellen:

Dem gemeinschaftlichen Strahle von zwei projectivischen Strahlenbüscheln entspricht in jedem der Büschel eine Tangente der Curve II. Ordnung, welche die Büschel erzeugen.

Dem gemeinschaftlichen Punkte von zwei projectivischen Punktreihen entspricht in jeder derselben ein Berührungspunkt des Büschels II. Ordnung, welchen die Punktreihen erzeugen.

Wie Sie sich erinnern, können zwei einförmige Grundgebilde auf eine einzige Art projectivisch so auf einander bezogen werden, dass drei bestimmten Elementen des einen drei willkürlich angenommene Elemente des anderen entsprechen. Wollen wir also eine Curve II. Ordnung mittelst projectivischer Strahlenbüschel erzeugen, so können wir nicht nur die Mittelpunkte S und S_1 der letzteren (s. Fig. 31), sondern noch drei weitere Punkte der Curve, nämlich die Schnittpunkte von drei Paaren entsprechender Strahlen der Büschel, in einer durch $\overline{SS_1}$ gehenden Ebene willkürlich annehmen. Fällt einer dieser drei Schnittpunkte mit S zusammen, so ist von der Curve die Tangente im Punkte S gegeben; und das Gleiche kann bei S_1 eintreten. — Um einen Strahlenbüschel II. Ordnung mittelst projectivischer Punktreihen zu erzeugen, können wir nicht nur die Träger u und u_1 der letzteren (s. Fig. 32), sondern noch drei weitere Strahlen des Büschels, nämlich die Verbindungslinien von drei Paaren entsprechender Punkte der Punktreihen,

in einer durch u und u_1 gehenden Ebene willkürlich annehmen. Fällt eine dieser Verbindungslinien mit u zusammen, so ist von dem Büschel II. Ordnung der Berührungspunkt im Strahle u gegeben; und dasselbe kann bei u_1 eintreten. Die Aufgaben:

Eine Curve II. Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem derselben S, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei derselben S und S_1,

Einen Büschel II. Ordnung zu construiren, von welchem gegeben sind fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem derselben u, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei derselben u und u_1,

sind folglich ausführbar; und zwar sind sie zurückgeführt auf die folgenden Aufgaben:

Zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1 sind durch drei Paare einander entsprechender Strahlen a und a_1, b und b_1, c und c_1 gegeben; es sollen beliebig viele Punkte der Curve k II. Ordnung construirt werden, welche sie mit einander erzeugen.

Zwei projectivische Punktreihen u und u_1 sind durch drei Paare einander entsprechender Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 gegeben; es sollen beliebig viele Strahlen des Büschels K II. Ordnung construirt werden, welchen sie erzeugen.

Diese Aufgaben gehen darauf hinaus, zu jedem beliebigen vierten Elemente des einen Grundgebildes das entsprechende des anderen zu finden; denn damit ist zugleich ein neues Element des von beiden erzeugten Gebildes II. Ordnung bestimmt. Ich könnte Sie also auf die im letzten Vortrag (S. 49) angegebene Construction verweisen. Doch will ich das vorliegende Problem noch einmal in einer mehr symmetrischen Weise lösen, besonders weil sich mehrere wichtige Sätze an die Auflösung knüpfen. Dieselbe besteht darin, dass wir zu den gegebenen Grundgebilden ein drittes aufsuchen, welches zu jedem der ersteren perspectivisch liegt; nämlich*):

Durch den Schnittpunkt $a\,a_1$ von irgend zwei einander entsprechenden Strahlen a und a_1 der projectivischen Büschel S

In der Verbindungslinie $A\,A_1$ von irgend zwei einander entsprechenden Punkten A und A_1 der projectivischen Punktreihen

*) Ich wiederhole bei dieser Gelegenheit meinen Rath, dass der Anfänger die Figuren selber zeichne nach den Angaben des Textes, weil dadurch die Auffassung wesentlich erleichtert wird.

und S_1 (Fig. 33) legen wir zwei Gerade u und u_1, von denen die erste u den Büschel $S(a\,b\,c)$ in einer Punktreihe $u\,(A\,B\,C)$ und die zweite u_1 den Büschel S_1 $(a_1 b_1 c_1)$ in einer Punktreihe u_1 $(A_1 B_1 C_1)$ schneidet. Als Schnitte projectivischer Strahlenbüschel sind diese Punktreihen u und u_1 auch zu einander projectivisch. Sie liegen aber sogar perspectivisch, weil in ihrem Schnittpunkte zwei homologe Punkte A und A_1 vereinigt sind (S. 46). Sie sind also Schnitte desjenigen Strahlenbüschels S_2, in dessen Mittelpunkt die Strahlen $\overline{B B_1}$ und $\overline{C C_1}$ sich schneiden.

Um nun zu irgend einem Strahle d des Büschels S den entsprechenden d_1 von S_1 zu finden, projiciren wir den Schnittpunkt $d\,u$ oder D aus dem Punkte S_2 auf u_1 nach D_1; dann ist $\overline{D_1 S_1}$, der gesuchte Strahl d_1. Der Punkt $d\,d_1$ oder P liegt auf der Curve k II. Ordnung.

u und u_1 (Fig. 34) nehmen wir die Mittelpunkte S und S_1 von zwei Strahlenbüscheln an, von denen der erste S $(a\,b\,c)$ die Punktreihe u $(A\,B\,C)$, und der zweite S_1 $(a_1 b_1 c_1)$ die Punktreihe u_1 $(A_1 B_1 C_1)$ projicirt. Als Scheine projectivischer Punktreihen sind diese Strahlenbüschel S und S_1 auch zu einander projectivisch. Sie liegen aber sogar perspectivisch, weil in der Verbindungslinie $\overline{S S_1}$ ihrer Mittelpunkte zwei homologe Strahlen a und a_1 vereinigt sind (S. 46). Sie sind also Scheine derjenigen Punktreihe, welcher die Schnittpunkte $b\,b_1$ und $c\,c_1$ angehören.

Um nun zu irgend einem Punkte D von u den entsprechenden D_1 von u_1 zu finden, schneiden wir die Gerade $\overline{D S}$ oder d durch u_2, und projiciren den Schnittpunkt aus S_1 durch den Strahl d_1 auf die Gerade u_1. Die Projection $d_1 u_1$ ist der gesuchte Punkt D_1. Der Strahl $\overline{D D_1}$ gehört zu dem Büschel K II. Ordnung.*)

Hiermit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst:

Auf einem beliebigen Strahl von S (oder S_1) den zweiten, von S (resp. S_1) verschiedenen Schnittpunkt mit der Curve II. Ordnung zu finden.

Durch einen beliebigen Punkt von u (oder u_1) den zweiten, von u (resp. u_1) verschiedenen Strahl des Büschels II. Ordnung zu legen.

Indem wir auf die eben angegebene Weise auch zu dem gemeinsamen Strahle der Büschel, oder andererseits zu dem Schnitt-

*) In Fig. 34 ist der Büschel K II. Ordnung angedeutet durch die von ihm eingehüllte Curve.

punkte der Punktreihen die beiden entsprechenden Strahlen resp. Punkte suchen, lösen wir die Aufgabe:

In den Mittelpunkten von zwei projectivischen Strahlenbüscheln die Tangenten der von ihnen erzeugten Curve II. Ordnung zu construiren.

Auf zwei projectivischen Punktreihen, die einen Büschel II. Ordnung erzeugen, die Berührungspunkte dieses Büschels zu finden.

Ein weiteres wichtiges Resultat ergiebt sich in folgender Weise aus unserer Construction. Ziehen Sie einerseits links (Fig. 33) den Strahl $\overline{S_1 S_2}$ oder m_1, welcher in M_1 und M von resp. u_1 und u geschnitten wird, so entspricht demselben in S der Strahl $\overline{SM}$; denn wenn D_1 mit M_1 zum Zusammenfall gebracht wird, so fallen zugleich D und P mit M zusammen. Also ist M derjenige Punkt, in welchem die Curve k zum zweiten Male von u geschnitten wird. Ebenso liegt der Punkt L_1, in welchem u_1 zum zweiten Male die Curve k schneidet, auf der Geraden $\overline{S S_2}$. Ich erinnere Sie hierbei, dass die willkürlich gewählten Geraden u und u_1 keiner weiteren Bedingung unterworfen sind, als dass sie sich in einem Punkte der Curve k schneiden. — Verbinden Sie andererseits rechts (Fig. 34) den Schnittpunkt $u_1 u_2$ oder Q_1 mit S, so liegt auf dieser Geraden der Punkt Q von u, welcher dem Punkte Q_1 von u_1 entspricht, oder $\overline{S Q_1}$ ist ein Strahl des Büschels K II. Ordnung; und ebenso ist der Strahl $\overline{S_1 R}$, welcher aus S_1 den Schnittpunkt von u und u_2 projicirt, ein Strahl von K. Da wir S und S_1 willkürlich auf einem Strahle a des Büschels K gewählt haben, so ist damit die Doppelaufgabe gelöst:

Auf irgend einer Geraden u, welche eine Curve k II. Ordnung in einem gegebenen Punkte A schneidet, den zweiten Schnittpunkt mit k zu finden.

Durch irgend einen Punkt S, welcher auf einem gegebenen Strahle a eines Büschels K II. Ordnung liegt, den zweiten Strahl dieses Büschels zu ziehen.

Auch die beiden überaus fruchtbaren Sätze des Pascal und des Brianchon, deren ich in der Einleitung Erwähnung that, ergeben sich wie von selbst aus unserer Construction. Bestimmen wir links zu den fünf Punkten S, S_1, A, M und L_1 der Curve k noch irgend einen sechsten Punkt P (Fig. 33), so liegen zufolge der Construction von P der Schnittpunkt D von SP und u, und der Schnittpunkt D_1 von $\overline{S_1 P}$ und u_1 in einer durch S_2 gehenden Geraden. Aber D, D_1 und S_2 sind diejenigen Punkte, in welchen

die Gegenseiten des Sechsecks SPS_1MAL_1 sich schneiden. — Construiren wir andererseits rechts (Fig. 34) zu den fünf Strahlen u, u_1, $\overline{SS_1}$, $\overline{SQ_1}$ und S_1R des Büschels K II. Ordnung noch einen sechsten Strahl $\overline{DD_1}$, so müssen nach der Construction die Geraden $\overline{SD}$ und S_1D_1 sich auf der Geraden Q_1R oder u_2 schneiden. Diese drei durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden sind aber die Hauptdiagonalen, d. h. die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte des Sechsecks $SS_1RDD_1Q_1$. Wir haben somit folgende Lehrsätze bewiesen:

Lehrsatz des Pascal:
In jedem einfachen Sechseck, welches einer Curve II. Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich die drei Paar Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden.

Lehrsatz des Brianchon:
In jedem einfachen Sechseck, welches von sechs Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildet wird, schneiden sich die drei Haupt-Diagonalen in einem Punkte.

Streng genommen haben wir freilich noch ein Bedenken zu beseitigen, welches bei dem Beweise dieser Sätze sich geltend macht. Die beiden hier in Frage kommenden Sechsecke enthalten Elemente, die nicht willkürlich gewählt sind; denn links z. B. sind wohl die Eckpunkte A, M, L_1 und P, nicht aber S und S_1 willkürlich gewählte Punkte der Curve k. Es ist aber denkbar, dass die Mittelpunkte S und S_1 der projectivischen Strahlenbüschel, durch welche die Curve erzeugt ist, durch besondere Eigenschaften sich auszeichnen, dass z. B. der Lehrsatz des Pascal nur für solche eingeschriebene Sechsecke gilt, zu deren Eckpunkten auch S und S_1 gehören. Wir wollen nun dieses Bedenken erledigen durch den Nachweis, dass je zwei andere Punkte der Curve ebensowohl wie S und S_1 die Mittelpunkte von zwei projectivischen Strahlenbüscheln sein können, welche die Curve erzeugen, dass also S und S_1 durch zwei beliebige andere Curvenpunkte ersetzt werden können. Analoges gilt rechts von den Geraden u und u_1, welche in dem Sechseck des Brianchon als Seiten vorkommen.

Denken Sie sich im Pascal'schen Sechseck SPS_1MAL_1 (Fig. 33) die sämmtlichen Eckpunkte ausser A fest, und nur diesen auf der Curve fortgleitend, so dreht sich $\overline{L_1A}$ oder u_1 um L_1 und $\overline{MA}$ oder u um M, und die Punkte D_1 und D gleiten fort auf den festen Geraden d_1 und d, jedoch so, dass die Gerade $\overline{DD_1}$ stets durch den festen Punkt S_2 geht. Denn der Pascal'sche

Satz gilt für ein jedes so entstandene Sechseck. Folglich beschreiben D_1 und D zwei perspectivische Punktreihen d_1 und d, welche Schnitte des Strahlenbüschels S_2 sind. Und zugleich beschreiben u_1 und u um resp. L_1 und M zwei projectivische Strahlenbüschel, welche nämlich Scheine sind von den perspectivischen Punktreihen d_1 und d. Wir können also die Curve k auch als Erzeugniss der projectivischen Strahlenbüschel L_1 und M auffassen, deren Mittelpunkte zwei willkürliche Punkte der Curve sind. — Denken Sie sich ebenso im Sechseck $SS_1RDD_1Q_1$ (Fig. 34) vom Brianchon die Seite SS_1 bewegt, während die übrigen Seiten unverändert bleiben, so jedoch, dass $\overline{SS_1}$ nicht aufhört, ein Strahl des Büschels K II. Ordnung zu sein; dann beschreibt S_1 eine Punktreihe S_1R oder r_1 und S eine zu r_1 projectivische Punktreihe SQ_1 oder q. Denn der Schnittpunkt der Hauptdiagonalen $\overline{S_1D_1}$ und $\overline{SD}$ bewegt sich auf der festen Geraden Q_1R und beschreibt in dieser eine Punktreihe u_2, zu welcher q und r_1 perspectivisch liegen. Wir können uns also den Büschel II. Ordnung auch durch die projectivischen Punktreihen q und r_1 erzeugt denken. Hiermit ist bewiesen, dass die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon allgemein gültig sind, und zugleich sind wir zu folgendem Fundamentalsatze über die Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung gelangt:

Eine Curve II. Ordnung wird aus beliebigen zwei ihrer Punkte durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt, wenn nämlich je zwei solche Strahlen der Büschel einander entsprechend genannt werden, welche durch denselben Punkt der Curve gehen.

Ein Strahlenbüschel II. Ordnung wird von beliebigen zwei seiner Strahlen in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten, wenn nämlich je zwei solche Punkte der Punktreihen einander entsprechend genannt werden, welche auf demselben Strahle des Büschels liegen.

Wir werden diese Sätze später benutzen, um auch die Gebilde II. Ordnung auf einander und auf die einförmigen Grundgebilde projectivisch zu beziehen, ähnlich wie wir für letztere projectivische Beziehungen aufgestellt haben. Zu dem Ende stellen wir auf Grund dieser Sätze folgende Definitionen auf:

Vier Punkte einer Curve II. Ordnung heissen „harmonische Punkte“, wenn sie aus irgend einem und folglich aus

Vier Strahlen eines Büschels II. Ordnung heissen „harmonische Strahlen“, wenn sie von irgend einem und folglich von

jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt werden.

jedem fünften Strahle des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Durch drei Punkte einer Curve oder drei Strahlen eines Büschels II. Ordnung ist der vierte harmonische eindeutig bestimmt und kann leicht construirt werden, sobald noch angegeben ist, von welchem der gegebenen drei Punkte oder Strahlen er getrennt sein soll.

Indem wir Bezug nehmen auf einen früheren Satz über die Tangenten der Curven und die Berührungspunkte der Büschel II. Ordnung (S. 57), folgern wir aus dem Fundamentalsatze:

Durch jeden Punkt einer Curve II. Ordnung geht eine Tangente derselben.

Auf jedem Strahl eines Büschels II. Ordnung liegt ein Berührungspunkt desselben.

Jede Curve II. Ordnung wird also von einer Schaar von Tangenten eingehüllt, und jeder Strahlenbüschel II. Ordnung umhüllt eine Reihe von Berührungspunkten. Es wird eine Aufgabe meines nächsten Vortrages sein, Ihnen zu zeigen, dass jene Schaar von Tangenten und diese Reihe von Berührungspunkten Nichts weiter sind, als ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe II. Ordnung.

Andere sehr wichtige Eigenschaften der Curven und Büschel II. Ordnung sind in folgenden Sätzen ausgesprochen, die wir oft benutzen werden:

Zwei Curven II. Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem derselben S, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei derselben S und S_1 gemein haben.

Denn projiciren wir die sämmtlichen Punkte der beiden Curven aus dem gemeinschaftlichen Punkte S durch einen Strahlenbüschel, so sind zu diesem die beiden Strahlenbüschel projectivisch, welche aus dem gemeinschaftlichen Punkte S_1 die beiden Curven projiciren. Letztere Büschel aber sind identisch, weil

Zwei Strahlenbüschel II. Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder fünf Strahlen, oder vier Strahlen und den Berührungspunkt in einem derselben u, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei derselben u und u_1 gemein haben.

Denn schneiden wir die sämmtlichen Strahlen der beiden Büschel durch den gemeinschaftlichen Strahl u in einer Punktreihe, so sind zu dieser die beiden Punktreihen projectivisch, in welchen durch den gemeinschaftlichen Strahl u_1 die beiden Büschel geschnitten werden.

sie drei Strahlen entsprechend gemein haben; nämlich jeden Strahl, welcher nach einem von S und S_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt der Curven geht, sodann den Strahl $\overline{S_1 S}$, wenn in S die Curven eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, und endlich die Tangente in S_1, wenn diese den Curven gemeinschaftlich ist. Jeder Strahl von S projicirt also einen gemeinschaftlichen Punkt der Curven.

Letztere Punktreihen sind aber identisch, weil sie drei Punkte entsprechend gemein haben; nämlich jeden Punkt, welcher in einem von u und u_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Strahle der Büschel liegt, sodann den Punkt $u u_1$, wenn in u die Büschel einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt haben, und endlich den Berührungspunkt in u_1, wenn dieser den Büscheln gemeinschaftlich ist. Durch jeden Punkt von u geht also noch ein gemeinschaftlicher Strahl der Büschel.

Siebenter Vortrag.

Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon.

Die wichtigen Eigenschaften, welche wir vom Sechseck in der Curve und im Strahlenbüschel II. Ordnung bewiesen haben, führen uns zu mehreren nicht minder wichtigen Sätzen über ebensolche Fünfecke, Vierecke und Dreiecke. Der Ableitung dieser Sätze muss ich einige Bemerkungen über die Tangenten der Curven und die Berührungspunkte der Büschel II. Ordnung voranschicken.

Wir haben jede Gerade p_1 (Fig. 31), welche mit einer Curve II. Ordnung in einer Ebene liegt und mit ihr nur einen Punkt S_1 gemein hat, eine Tangente der Curve im Punkte S_1 genannt, und gefunden, dass durch jeden Punkt der Curve eine einzige Tangente möglich ist. Jeder andere durch S_1 gehende Strahl a_1 der Ebene schneidet die Curve in noch einem zweiten Punkte A. Drehen

wir den Strahl a_1 um S_1, so durchläuft sein Schnittpunkt A die Curve, und nähert sich dem Punkte S_1 ins Unbegrenzte, wenn a_1 der Tangente p_1 unbegrenzt näher kommt. Die Tangente stellt sich hiernach dar als die Grenzlage der Verbindungslinie von zwei einander unendlich nahe kommenden Curvenpunkten, und zwar lässt sich diese Definition anwenden auf die Tangenten nicht allein der Curven II. Ordnung, sondern auch ganz beliebiger Curven. — Analog haben wir jeden Punkt P_1 (Fig. 32), durch welchen nur ein Strahl u_1 eines Büschels K II. Ordnung hindurchgeht, einen Berührungspunkt des letzteren im Strahle u_1 genannt, und gefunden, dass auf jedem Strahle des Büschels K ein einziger Berührungspunkt liegt. Durch jeden anderen Punkt A_1 von u_1 geht also noch ein zweiter Strahl a des Büschels. Bewegen wir A_1 auf u_1 fort, so durchläuft a den Büschel K, und nähert sich dem Strahle u_1 ins Unbegrenzte, wenn A_1 dem Punkte P_1 unbegrenzt näher kommt. Der Berührungspunkt stellt sich hiernach dar als die Grenzlage des Schnittpunktes von zwei einander unendlich nahe kommenden Strahlen des Büschels.

Wenn also in einem Sechseck, welches einer Curve II. Ordnung eingeschrieben ist, irgend zwei benachbarte Eckpunkte einander unbegrenzt sich nähern, so tritt an die Stelle der sie verbindenden Seite eine Tangente der Curve; und wenn in einem Sechseck, dessen Seiten aus Strahlen eines Büschels II. Ordnung bestehen, zwei benachbarte Seiten einander unbegrenzt sich nähern, so tritt an die Stelle des Eckpunktes, in welchem sie sich schneiden, ein Berührungspunkt des Büschels. Jenachdem nun ein, zwei oder drei Paare benachbarter Elemente zusammenfallen, geht das Sechseck über in ein Fünfeck, ein Viereck oder ein Dreieck. Für das Fünfeck lauten hiernach die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon, wie folgt:

In jedem einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Fünfeck liegen die Schnittpunkte von zwei Paaren nicht aufeinander folgender Seiten mit demjenigen dritten Punkte in einer Geraden, in welchem die fünfte Seite von der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird (Fig. 35).

In jedem Fünfeck, dessen Seiten von Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildet werden, schneiden sich die Diagonalen, welche irgend zwei Paare von Eckpunkten verbinden, in einem Punkte derjenigen Geraden, welche den fünften Eckpunkt mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet (Fig. 36).

Dieser Doppelsatz enthält die Lösung der beiden Aufgaben:

Wenn fünf beliebige Punkte einer Curve II. Ordnung gegeben sind, die Tangenten in denselben mittelst des Lineals zu zeichnen (Fig. 35).

Wenn fünf beliebige Strahlen eines Büschels II. Ordnung gegeben sind, die Berührungspunkte in denselben mittelst des Lineals zu zeichnen (Fig. 36).

Für das Viereck erhalten wir die folgenden Sätze (Fig. 37):

In jedem einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten mit demjenigen der Tangenten von irgend zwei gegenüberliegenden Eckpunkten in einer Geraden.

In jedem aus Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildeten Viereck schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinie der Berührungspunkte von irgend zwei Gegenseiten in einem Punkte.

Für das Dreieck endlich ergiebt sich Folgendes:

Die drei Punkte, in welchen die Seiten eines beliebigen, einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Dreiecks beziehungsweise von den Tangenten der gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, liegen auf einer Geraden.

Die drei Geraden, welche die Eckpunkte eines beliebigen, aus Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildeten Dreiecks beziehungsweise mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Alle diese Sätze, welche auch zur Lösung einer Reihe einfacher Aufgaben (namentlich derjenigen von Seite 58) benutzt werden können, lassen sich auch direct, ohne Benutzung des Sechsecks, ableiten. Ich will Ihnen beispielsweise für das Viereck diesen directen Beweis geben, weil derselbe uns zugleich neue merkwürdige Eigenschaften projectivischer Grundgebilde aufschliesst, und weil ich zudem die Sätze über das Viereck zu weiteren Folgerungen benutzen will.

Um in zwei projectivischen Strahlenbüscheln S und S_1 (Fig. 33) zu jedem Strahl des einen den entsprechenden Strahl des anderen leicht auffinden zu können, haben wir einen dritten Strahlenbüschel S_2 bestimmt, der zu jedem der ersteren perspectivisch liegt. Zu dem Ende schnitten wir S und S_1 in den resp. Punktreihen u und u_1 mittelst zwei Gerader, die wir durch den Schnittpunkt A von irgend zwei homologen Strahlen a und a_1 der gegebenen Büschel legten. Da diese Punktreihen perspectivisch

liegen, so ist der Strahlenbüschel S_2, von welchem sie beide Schnitte sind, der gesuchte.

Diese Schlüsse gelten auch dann noch, wenn u mit a_1 und u_1 mit a zusammenfällt (Fig. 38), so dass also die Punkte $b\,a_1$ und $b_1 a$ (d. h. B und B_1) oder $c\,a_1$ und $c_1 a$ (d. h. C und C_1) u. s. w., in welchen zwei einander entsprechende Strahlen a und a_1 von je zwei anderen b und b_1 oder c und c_1 wechselsweise geschnitten werden, mit einem festen Punkte S_2 in einer Geraden liegen. Wird durch diesen Punkt S_2 irgend eine Gerade $\overline{D D_1}$ gelegt, welche in D und D_1 die resp. Strahlen a_1 und a schneidet, so sind $\overline{SD}$ und $\overline{S_1 D_1}$ entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1. Bringen wir nun D_1 mit S zum Zusammenfall, so geht SD in $\overline{SS_2}$ oder q über, so dass diesem Strahl von S in S_1 der Strahl $\overline{S_1 S}$ oder q_1 entspricht, welcher die Mittelpunkte der Büschel S und S_1 verbindet. Die Gerade $\overline{SS_2}$ oder q ist also eine Tangente der von S und S_1 erzeugten Curve II. Ordnung, und ebenso $\overline{S_1 S_2}$ oder p_1. Oder der feste Punkt S_2 ist der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten q und p_1 in S und S_1, d. h. der beiden Strahlen, welche in jedem der Büschel S und S_1 dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{S S_1}$ entsprechen. Wir gelangen deshalb immer zu demselben Punkte S_2, mögen wir nun mit a und a_1, oder mit irgend einem anderen Paare (b und b_1 oder c und c_1) entsprechender Strahlen die resp. Geraden u_1 und u zusammenfallen lassen. Das heisst: Jede Gerade, welche zwei solche Punkte ($b\,c_1$ und $c\,b_1$) verbindet, in denen irgend zwei Paare (b, b_1 und c, c_1) entsprechender Strahlen sich wechselsweise schneiden, geht durch den Punkt S_2.

Um in zwei projectivischen Punktreihen u und u_1 (Fig. 34) zu jedem Punkte der einen den entsprechenden Punkt der anderen leicht auffinden zu können, haben wir in folgender Weise eine dritte Punktreihe u_2 bestimmt, welche zu jeder der gegebenen perspectivisch liegt. Wir projicirten u und u_1 durch die resp. Strahlenbüschel S und S_1, deren Mittelpunkte wir auf der Verbindungslinie a von irgend zwei homologen Punkten A und A_1 der gegebenen Punktreihen annahmen. Da diese Strahlenbüschel perspectivisch liegen, so ist das gerade Gebilde u_2, von welchem sie beide Scheine sind, das gesuchte.

Lassen wir nun S mit A_1 und S_1 mit A zusammenfallen (Fig. 39), so geht u_2 durch diejenigen beiden Punkte von u und u_1, welche dem Schnittpunkte $u\,u_1$ entsprechen. Zwei beliebige

Punkte D und D_1, die einander entsprechen, werden nämlich aus resp. A_1 und A durch zwei Strahlen A_1D und AD_1 projicirt, die einander auf der Geraden u_2 schneiden. Offenbar aber fällt dieser Schnittpunkt und folglich auch D_1 mit dem Punkte $u_1 u_2$ oder P_1 zusammen, wenn D mit uu_1 oder P zum Zusammenfall gebracht wird, so dass u_2 wirklich durch den einen (und ebenso durch den anderen) der beiden Punkte P_1 und Q geht, welche dem Schnittpunkte PQ_1 von u und u_1 entsprechen. Mit anderen Worten: u_2 verbindet die in u und u_1 liegenden Berührungspunkte des Strahlenbüschels II. Ordnung, welcher durch die beiden Punktreihen erzeugt wird. Wir gelangen deshalb immer zu derselben Geraden u_2, mögen wir nun mit A und A_1, oder mit irgend einem anderen Paare (B und B_1 oder C und C_1) homologer Punkte die resp. Mittelpunkte S_1 und S zusammenfallen lassen. Jeder Schnittpunkt von zwei solchen Strahlen ($\overline{BC_1}$ und $\overline{B_1C}$), durch welche irgend zwei Paare (B, B_1 und C, C_1) entsprechender Punkte sich wechselsweise projiciren, liegt auf der Geraden u_2.

Die eben gewonnenen Ergebnisse lassen sich in folgendem Doppelsatze einander gegenüberstellen:

Die beiden Punkte ab_1 und a_1b, in welchem irgend zwei Paare a, a_1 und b, b_1 homologer Strahlen der projectivischen Büschel S und S_1 sich wechselseitig schneiden, liegen mit dem Schnittpunkte S_2 derjenigen beiden Strahlen in einer Geraden, welche dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ der Büschel entsprechen.

Die beiden Geraden $\overline{AB_1}$ und $\overline{A_1B}$, durch welche irgend zwei Paare A, A_1 und B, B_1 homologer Punkte der projectivischen Punktreihen u und u_1 sich wechselseitig projiciren, schneiden sich auf der Verbindungslinie u_2 derjenigen beiden Punkte, welche dem gemeinschaftlichen Punkte uu_1 der Punktreihen entsprechen.

Sie werden in diesen Sätzen sofort diejenigen über das Viereck in der Curve und im Strahlenbüschel II. Ordnung erkennen, wenn ich noch folgende Bemerkungen hinzufüge:

In der Curve II. Ordnung, welche durch die Büschel S und S_1 erzeugt wird, bilden die Punkte S, aa_1, S_1 und bb_1 ein eingeschriebenes Viereck, in welchem a und b_1, sowie a_1 und b

In dem Strahlenbüschel II. Ordnung, welchen die Punktreihen u und u_1 erzeugen, bilden die Strahlen u, $\overline{AA_1}$, u_1 und $\overline{BB_1}$ ein Viereck, in welchem A und B_1, sowie A_1 und B

Gegenseiten sind, während in S_2 sich die beiden Tangenten schneiden, welche in den gegenüberliegenden Eckpunkten S und S_1 die Curve berühren.

gegenüberliegende Eckpunkte sind, während auf u_2 die beiden, den Gegenseiten u und u_1 angehörenden Berührungspunkte des Büschels II. Ordnung liegen.

Dass die obigen Sätze ganz besonders geeignet sind, uns zu jedem Elemente des einen von zwei projectivischen einförmigen Grundgebilden das entsprechende Element des anderen zu liefern, liegt auf der Hand. Denn wenn z. B. in zwei projectivischen Punktreihen u und u_1 (Fig. 39) drei Paare entsprechender Punkte gegeben sind, so lässt sich aus diesen die Gerade u_2 sofort ableiten, welche dann jedem Punkte von u den entsprechenden von u_1 sehr einfach zuweist.

Die soeben wiederholt bewiesenen Sätze vom Viereck in der Curve und im Strahlenbüschel II. Ordnung lassen sich auch in der folgenden allgemeineren Form aussprechen (Fig. 37):

Bilden vier Punkte K, L, M, N einer Curve II. Ordnung ein vollständiges Viereck, und ihre Tangenten k, l, m, n ein vollständiges Vierseit, so liegen in den Verbindungslinien der drei Punkte X, Y, Z, in welchen die Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, je zwei Gegenpunkte des Vierseits.

Bilden vier Strahlen k, l, m, n eines Büschels II. Ordnung ein vollständiges Vierseit, und ihre Berührungspunkte K, L, M, N ein vollständiges Viereck, so gehen durch die Schnittpunkte X, Y, Z der drei Geraden, welche die Gegenpunkte des Vierseits verbinden, je zwei Gegenseiten des Vierecks.

Denn die früher aufgestellten Sätze gelten links für jedes der drei einfachen Vierecke, aus denen das vollständige Viereck $KLMN$, und rechts für jedes der drei einfachen Vierseite, aus denen das vollständige Vierseit $klmn$ zusammengesetzt ist.

In dieser Fassung sagt aber der Satz links offenbar ganz dasselbe aus wie der Satz rechts; denn beide sagen aus, dass das Dreieck, dessen Seiten je zwei Gegenpunkte des Vierseits verbinden, identisch ist mit dem Dreieck XYZ, in dessen Eckpunkten je zwei Gegenseiten des Vierecks sich schneiden. Hat aber umgekehrt ein Viereck $KLMN$ zu einem ihm umschriebenen Vierseit $klmn$ diese Lage, so kann sowohl eine Curve II. Ordnung construirt werden, welche die Geraden k, l, m, n in den Punkten K, L, M, N berührt, als auch ein Büschel II. Ordnung, welcher die Punkte K, L, M, N in den Strahlen k, l, m, n zu

Berührungspunkten hat. Denn zufolge unseres Satzes hat eine Curve II. Ordnung, welche durch die Punkte K, L, M, N hindurchgeht, und in K die Gerade k berührt, auch die Geraden l, m, n zu Tangenten; und es muss der Büschel II. Ordnung, welcher die Strahlen k, l, m, n enthält, und in k den Punkt K zum Berührungspunkte hat, auch die Punkte L, M, N zu Berührungspunkten haben. Vier Tangenten einer Curve II. Ordnung nebst ihren vier Berührungspunkten können daher stets als vier Strahlen eines Büschels II. Ordnung nebst ihren vier Berührungspunkten angesehen werden.

Eine Curve II. Ordnung, welche durch drei Berührungspunkte K, L, M eines Büschels II. Ordnung hindurchgeht und in zwei K und L dieser Punkte die zugehörigen Strahlen k und l des Büschels zu Tangenten hat, geht folglich auch durch jeden vierten Berührungspunkt N des Büschels und hat den zugehörigen Strahl n des letzteren zur Tangente. Umgekehrt enthält ein Büschel II. Ordnung jede Tangente einer Curve II. Ordnung, sobald er drei solche enthält und die Berührungspunkte von zwei derselben auf der Curve liegen. Wir haben also folgende schöne Beziehung zwischen den Curven und Büscheln II. Ordnung:

Die sämmtlichen Tangenten einer Curve II. Ordnung bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung.	Die sämmtlichen Berührungspunkte eines Strahlenbüschels II. Ordnung bilden eine Curve II. Ordnung.

Seiner Wichtigkeit wegen beweise ich diesen Doppelsatz noch einmal auf andere Art, wobei sich noch eine neue interessante Eigenschaft der Curven II. Ordnung ergeben wird. Möge von den vier Eckpunkten K, L, M, N (Fig. 37) des einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Vierecks der eine K sich auf der Curve bewegen, indess die übrigen drei nebst ihren resp. Tangenten l, m, n ihre Lage nicht ändern. Dann gleitet die Tangente k des Punktes K auf der Curve fort, und auch ihre Schnittpunkte E und A mit den resp. Tangenten n und l bewegen sich. Es ist aber leicht zu erkennen, dass E und A bei dieser Bewegung zwei projectivische Punktreihen in resp. n und l beschreiben, dass also die Tangente k einen Strahlenbüschel II. Ordnung durchläuft. Denn die beiden Diagonalen $\overline{EB}$ und $\overline{AD}$ des Vierseits k, l, m, n schneiden sich stets in einem Punkte Y der festen Geraden $\overline{LN}$, und beschreiben folglich um die festen Eckpunkte B und D zwei perspectivische Strahlenbüschel; und von diesen

sind die Punktreihen n und l, welche die Punkte E und A beschreiben, Schnitte. Damit ist der Satz links bewiesen, und der Satz rechts kann ganz analog bewiesen werden.

Auch die Gerade $\overline{MK}$ geht durch den Punkt Y und beschreibt also bei der Bewegung des Punktes K einen Strahlenbüschel um den festen Punkt M, welcher zu dem von $\overline{BE}$ beschriebenen Büschel B perspectivisch und folglich auch zu der von E beschriebenen Punktreihe n projectivisch ist. Daraus folgt, wenn K alle Punkte der Curve durchläuft:

Sind von einer Curve II. Ordnung ein beliebiger fester Punkt M *und eine beliebige feste Tangente* n *gegeben, und weisen wir jedem Strahle von* M, *welcher einen beliebigen Punkt* K *der Curve projicirt, denjenigen Punkt von* n *zu, durch welchen die Tangente* k *des Punktes* K *hindurchgeht, so sind der Strahlenbüschel* M *und die Punktreihe* n *projectivisch auf einander bezogen.*

Dieser Satz, den Chasles seinem Traité des Sections coniques an die Spitze gestellt hat, ist in der Ebene sich selbst reciprok, da ja, wie eben bewiesen wurde und wie aus ihm selbst folgt, die Tangenten einer Curve II. Ordnung stets einen Büschel II. Ordnung bilden. Ich will jetzt nur eine Folgerung aus demselben ziehen, nämlich:

„Die Tangenten an vier harmonischen Punkten einer Curve „II. Ordnung sind vier harmonische Tangenten.“

Sie werden nämlich von jeder fünften Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten, weil ihre vier Berührungspunkte aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt werden.

Den Satz, dass ein Büschel II. Ordnung von irgend zwei seiner Strahlen in projectivischen Punktreihen geschnitten wird, können wir nunmehr auch so aussprechen:

„Die sämmtlichen Tangenten einer Curve II. Ordnung werden „von je zwei unter ihnen in projectivischen Punktreihen ge„schnitten.“

Ebenso kann der Lehrsatz des Brianchon auch in folgender Fassung demjenigen des Pascal gegenübergestellt werden:

„Von jedem einer Curve II. Ordnung „umschriebenen“ Sechseck „(dessen Seiten die Curve berühren) schneiden sich die drei „Hauptdiagonalen in einem Punkte.“

Und zwar wird er, sowie die Sätze über das Fünfeck, Viereck und Dreieck im Strahlenbüschel, gewöhnlich in dieser Form ausgesprochen.

Ich begnüge mich damit, Ihnen noch einige der früher bewiesenen Sätze nebst ihren reciproken in dieser neuen Form vorzuführen, jedoch übertragen auf die Gebilde II. Ordnung im Strahlenbündel. Nach früheren Sätzen (Seite 56) wird jede Curve und jeder Strahlenbüschel II. Ordnung aus einem nicht in derselben Ebene gelegenen Punkte durch eine Kegelfläche und einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Jede Tangente der Curve wird durch eine Ebene projicirt, welche mit der Kegelfläche nur einen Strahl gemein hat, und deshalb „Berührungsebene" desselben heisst. Ebenso wird jeder Berührungspunkt des Strahlenbüschels II. Ordnung durch einen sogenannten „Berührungsstrahl" des Ebenenbüschels projicirt, durch welchen nur eine Ebene des letzteren hindurchgeht. Da auch umgekehrt jede Kegelfläche und jeder Ebenenbüschel II. Ordnung durch eine nicht den Mittelpunkt enthaltende Ebene in einer Curve resp. einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten wird, so folgt:

Die sämmtlichen Berührungsebenen einer Kegelfläche II. Ordnung bilden einen Ebenenbüschel II. Ordnung.

Die sämmtlichen Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung werden aus je zwei unter ihnen durch projectivische Ebenenbüschel projicirt (vgl. Seite 62).

Die sämmtlichen Berührungsstrahlen eines Ebenenbüschels II. Ordnung bilden eine Kegelfläche II. Ordnung.

Die sämmtlichen Berührungsebenen einer Kegelfläche II. Ordnung werden von je zwei unter ihnen in projectivischen Strahlenbüscheln geschnitten (Seite 62).

Aehnlich wie früher (Seite 62) können wir daher folgende Definitionen aufstellen:

Vier Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung heissen „harmonische Strahlen", wenn sie aus irgend einem und folglich aus jedem fünften Strahle der Fläche durch vier harmonische Ebenen projicirt werden.

Vier Berührungsebenen einer Kegelfläche II. Ordnung heissen „harmonische Berührungsebenen", wenn sie von irgend einer und folglich von jeder fünften in vier harmonischen Strahlen geschnitten werden.

Die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon lauten für die Kegelfläche II. Ordnung:

In jedem einer Kegelfläche II. Ordnung eingeschriebenen Sechskant schneiden sich die

In jedem einer Kegelfläche II. Ordnung umschriebenen Sechskant schneiden sich die drei

drei Paar Gegenseiten in drei Geraden, welche in einer Ebene liegen.	Hauptdiagonal-Ebenen in einer Geraden.

Es wird eine nützliche Uebung für Sie sein, wenn Sie auch die übrigen wichtigen Sätze, welche wir für ebene Gebilde bewiesen haben, auf die entsprechenden Gebilde im Strahlenbündel übertragen.

Ich kehre noch einmal zu den Curven II. Ordnung zurück, um aus dem Satze, dass sie mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein haben, für ihren Verlauf in der Ebene eine bemerkenswerthe Folgerung zu ziehen. Zufolge dieses Satzes hat nämlich eine solche Curve mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene entweder gar keinen Punkt gemein, oder einen Punkt, in welchem sie von der unendlich fernen Geraden berührt wird, oder endlich zwei Schnittpunkte. Im ersten Falle sind alle Punkte der Curve eigentliche Punkte und alle ihre Tangenten eigentliche Strahlen der Ebene, und die Curve wird eine „Ellipse" genannt (s. Figg. 33 bis 39). Im zweiten Falle erstreckt sich die Curve mit zwei Aesten ins Unendliche, indem sie dem Punkte zustrebt, in welchem die unendlich ferne Gerade sie berührt; sie heisst dann eine „Parabel" (s. Fig. 32). Im dritten Falle besteht die Curve aus zwei krummen Linien, deren jede mit zwei Aesten den beiden unendlich fernen Punkten zustrebt, durch welche die beiden krummen Linien mit einander zusammenhängen; die Curve heisst in diesem Falle eine „Hyperbel" (Fig. 31). Weil die unendlich ferne Gerade der Ebene die Hyperbel schneidet, so sind alle Tangenten der letzteren, insbesondere auch die Tangenten der beiden unendlich fernen Curvenpunkte, eigentliche Strahlen der Ebene. Es giebt also zwei Tangenten, welchen sich die Hyperbel im Unendlichen anschmiegt, und welche die „Asymptoten" derselben genannt werden.

Dieselben drei Arten von Curven II. Ordnung können wir auch aus irgend einer Kegelfläche II. Ordnung herausschneiden, deren Mittelpunkt nicht unendlich fern liegt. Eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene Σ hat nämlich mit der Kegelfläche entweder nur diesen Punkt gemein, oder sie berührt dieselbe in einem Strahle s, oder endlich sie schneidet dieselbe in zwei Strahlen p und q. Jede zu Σ parallele Ebene Σ_1 schneidet im ersten Falle alle Strahlen der Kegelfläche in eigentlichen Punkten und die Kegelfläche selbst in einer Ellipse. Im zweiten Falle ist die Schnitt-

curve eine Parabel, weil der parallele Strahl s in einem unendlich fernen Punkte von Σ_1 geschnitten wird; und zwar ist die Schnittlinie von Σ_1 mit der Berührungsebene Σ die unendlich ferne Tangente der Parabel. Endlich im dritten Falle ist die Schnittcurve eine Hyperbel, weil die zwei Strahlen p und q in ihren unendlich fernen Punkten von Σ_1 geschnitten werden. Die Ebenen, welche in p und q die Kegelfläche berühren, werden von Σ_1 in den Asymptoten der Hyperbel geschnitten; und die Hyperbel besteht aus zwei krummen Linien, weil beide Hälften der Kegelfläche von Σ_1 geschnitten werden. Wir können die Hyperbel wie jede Curve II. Ordnung als eine in sich zurücklaufende, geschlossene Curve auffassen, weil jede eigentliche Kegelfläche, durch welche eine solche Curve projicirt wird, eine geschlossene, in sich zurücklaufende Fläche ist.

Zwei projectivische Strahlenbüschel, die schief in einer Ebene liegen, erzeugen eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem kein Paar einander entsprechender Strahlen, oder ein Paar oder zwei Paare parallel laufen. Wird also der eine Strahlenbüschel so in der Ebene verschoben, dass er mit dem andern concentrisch wird, jedoch ohne dass seine Strahlen die Richtung ändern, so haben diese concentrischen Büschel im ersten Falle keinen, im zweiten Falle einen und im dritten zwei Strahlen entsprechend gemein. Der letztere Fall tritt namentlich dann ein, wenn die Büschel entgegengesetzt projectivisch sind. Sie werden hiernach in vielen Fällen sofort erkennen können, ob eine durch genügend viele Bedingungen, z. B. durch fünf ihrer Punkte bestimmte Curve II. Ordnung eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Schwieriger ist diese Untersuchung, wenn die Curve durch Tangenten gegeben ist, oder durch zwei projectivische Punktreihen, welche den umhüllenden Büschel II. Ordnung erzeugen. Doch erkennen Sie sofort, dass zwei projectivische Punktreihen dann und nur dann die sämmtlichen Tangenten einer Parabel erzeugen, wenn ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen; denn nur in diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade der Ebene eine jener Tangenten. Man nennt zwei projectivische Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen, projectivisch „ähnlich“. Werden sie in perspectivische Lage gebracht, indem (Fig. 40) irgend zwei einander entsprechende eigentliche Punkte derselben auf einander gelegt werden, so stellen sie sich als Schnitte eines Parallelstrahlenbüschels dar, indem ihr Projections-

mittelpunkt auf dem unendlich fernen Strahle, also selbst unendlich fern liegt. Beiläufig ergiebt sich für die Parabeltangenten die metrische Beziehung:

„Je zwei Tangenten u und u, einer Parabel werden von den „übrigen $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{DD_1}$, ... proportional getheilt“ (Fig. 32). Daraus erklärt sich auch der Ausdruck „projectivisch ähnlich“.

Bei dieser Gelegenheit will ich noch folgende Sätze anführen:

„Bewegen sich die Eckpunkte eines Dreiecks so auf drei in „einer Ebene gegebenen Geraden, dass zwei Seiten desselben „ihre Richtung nicht ändern, so beschreibt die dritte Seite ent- „weder auch einen Parallelstrahlenbüschel, oder einen Strahlen- „büschel II. Ordnung, der eine Parabel umhüllt.“

Denn durch die Parallelstrahlenbüschel, welche die ersten beiden Dreiecksseiten beschreiben, werden zwei von den drei Punktreihen, die in den gegebenen Geraden liegen, auf die dritte und folglich auf einander projectivisch ähnlich bezogen.

„Sind eine Punktreihe u und ein Strahlenbüschel S, die in „derselben Ebene liegen, projectivisch auf einander bezogen, und „zieht man durch jeden Punkt von u eine Parallele zu dem ent- „sprechenden Strahle von S, so schneiden sich diese Parallelen „entweder in einem Punkte, oder sie umhüllen eine Parabel.“

Schneiden wir nämlich den Strahlenbüschel S durch die unendlich ferne Gerade der Ebene, so erhalten wir eine unendlich ferne Punktreihe, welche zu u projectivisch ist. Liegt dieselbe nicht perspectivisch zu u, so erzeugt sie mit u einen Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher auch die unendlich ferne Gerade enthält, und folglich eine Parabel umhüllt.

Wird eine Curve II. Ordnung aus einem unendlich fernen Punkte projicirt, der nicht in ihrer Ebene liegt, so erhalten wir eine Kegelfläche mit unendlich fernem Mittelpunkt, deren Strahlen also parallel sind. Dieselbe wird eine „Cylinderfläche“ II. Ordnung genannt. Zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen parallel sind, erzeugen demnach entweder einen Parallelstrahlenbüschel oder eine Cylinderfläche II. Ordnung. Wir theilen diese Cylinderflächen ein in elliptische, parabolische und hyperbolische, jenachdem sie von irgend einer und folglich von jeder Ebene, die nicht durch ihren unendlich fernen Mittelpunkt geht, in Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln geschnitten werden, oder was dasselbe ist, jenachdem sie keinen, einen oder zwei unendlich ferne Strahlen enthalten.

Achter Vortrag.

Pol und Polare in Bezug auf Curven zweiter Ordnung.

Die Sätze über Vierecke, welche einer Curve II. Ordnung eingeschrieben oder auch umschrieben sind, führen uns zu einer Reihe sehr wichtiger Eigenschaften dieser Curven, von denen ich Ihnen schon in der Einleitung einzelne angegeben habe. Wir gelangen zu denselben durch folgende Betrachtung:

Ist in der Ebene einer Curve II. Ordnung ein Punkt U gegeben (Figg. 41 und 42), der nicht auf der Curve selbst liegt, und legen wir durch denselben zwei die Curve schneidende Gerade (oder Secanten) $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, so können wir diese als Diagonalen eines der Curve eingeschriebenen einfachen Vierecks $ABCD$ betrachten. Die zwei Paare Gegenseiten $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ dieses Vierecks schneiden sich dann in je einem Punkte P resp. Q, die Tangenten a und c in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten A und C schneiden sich in einem dritten Punkte R, und diese drei Schnittpunkte P, Q und R liegen in einer Geraden u. Auf derselben Geraden schneiden sich auch die Tangenten b und d, welche in den Eckpunkten B und D construirt werden können (vgl. die Sätze über das eingeschriebene Viereck Seite 66 und 69).

Bezeichnen wir nun durch V und W die Schnittpunkte der Geraden u mit resp. $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, so erkennen Sie sofort, dass V von U harmonisch getrennt ist durch die Punkte A und C. Denn von dem Viereck $PBQD$ schneiden sich je zwei Gegenseiten in resp. A und C, während die Diagonale $\overline{BD}$ durch U und die Diagonale $\overline{PQ}$ durch V geht. Ebenso sind U und W harmonisch getrennt durch B und D. Die Gerade u wird also auch gefunden, indem wir nur eine Secante $\overline{AC}$ durch U legen, auf dieser den Punkt V suchen, welcher durch die Curvenpunkte A und C harmonisch von U getrennt ist, und denselben mit dem Schnittpunkte R der beiden in A und C construirten Tangenten verbinden. Und wie auch die zweite Secante $\overline{BD}$ durch U gelegt werden möge, so müssen doch stets auf der Geraden u, welche

schon durch die erste Secante völlig bestimmt ist, folgende Punkte liegen:

1) die Schnittpunkte P und Q der Gegenseiten des Vierecks $ABCD$,
2) der Schnittpunkt S der beiden in B und D construirten Tangenten,
3) der Punkt W, welcher von U durch die Punkte B und D harmonisch getrennt ist.

Wir wollen U den „Pol" der so bestimmten Geraden u nennen, und umgekehrt u die „Polare" des Punktes U. Die Polare eines gegebenen Punktes bezüglich einer Curve II. Ordnung kann man hiernach auf verschiedene Art, und zwar durch lineare Constructionen leicht finden. Umgekehrt kann der Pol U einer gegebenen Geraden u construirt werden, indem man aus zwei beliebigen Punkten R und S derselben zwei Paare Tangenten a, c und b, d an die Curve II. Ordnung legt (Figg. 41 und 42). Durch den Pol U gehen dann:

1) die Diagonalen des einfachen Vierseits $abcd$,
2) die Verbindungslinien $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ der Berührungspunkte jedes Tangentenpaares,
3) die beiden Strahlen, von denen der eine durch a und c, der andere durch b und d harmonisch getrennt ist von u.

Denn der Schnittpunkt U von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist der Pol von u, weil seine Polare nach dem Obigen mit u zusammenfällt, da auf ihr die Schnittpunkte der in A und C, sowie in B und D construirten Tangentenpaare liegen. Ferner sind die Geraden $\overline{RU}$ und u harmonisch getrennt durch a und c, weil die Punkte U und V jener beiden Geraden durch die Berührungspunkte A und C dieser Tangenten harmonisch getrennt sind; und ebenso ist $\overline{SU}$ von u harmonisch getrennt durch b und d, so dass die Behauptung 3) bewiesen ist. Die Richtigkeit der Behauptung 1) folgt unmittelbar aus dem früher bewiesenen Satze (Seite 69) über das umschriebene Vierseit.

Wenn die Polare u eines Punktes U (Fig. 42) die Curve II. Ordnung schneidet, so wird die Curve von den beiden Geraden berührt, welche den Punkt U mit den Schnittpunkten verbindet. Denn hätte eine dieser Geraden mit der Curve noch einen zweiten Punkt gemein, so müsste derselbe von dem ersten Schnittpunkte harmonisch getrennt sein durch U und u, und dieser erste Schnittpunkt könnte also nicht auf u liegen. Die Gerade u ist also in diesem Falle die „Berührungssehne" des Punktes U, d. h. die

Gerade, welche die Berührungspunkte der beiden, aus U an die Curve II. Ordnung gelegten Tangenten verbindet.

Alle diese Ergebnisse können wir in folgendem Doppelsatze zusammenfassen:

Wenn durch einen Punkt U, welcher in der Ebene einer Curve II. Ordnung, aber nicht auf derselben liegt, beliebig viele Secanten durch die Curve gelegt werden, und man bestimmt:

1) in jedem der Curve eingeschriebenen einfachen Viereck, welches irgend zwei dieser Secanten zu Diagonalen hat, die Schnittpunkte der Gegenseiten,
2) auf jeder Secante den Punkt, welcher von U durch die beiden Curvenpunkte harmonisch getrennt ist,
3) den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Tangenten, welche in den Schnittpunkten einer jeden Secante die Curve berühren,
4) wenn von U Tangenten an die Curve gezogen werden können, die Berührungspunkte derselben,

so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden u, welche die Polare des Punktes U in Bezug auf die Curve II. Ordnung genannt wird.

Wenn von beliebig vielen Punkten einer Geraden u, welche in der Ebene einer Curve II. Ordnung liegt, aber dieselbe nicht berührt, je zwei Tangenten an die Curve gezogen werden, und man bestimmt:

1) in jedem der Curve umschriebenen einfachen Vierseit, dessen Gegenseiten von zwei solchen Tangentenpaaren gebildet werden, die Diagonalen,
2) für jeden Punkt von u die Gerade, welche durch die beiden Tangenten der Curve harmonisch von u getrennt ist,
3) die Gerade, welche die Berührungspunkte eines jeden Tangentenpaares verbindet,
4) wenn u die Curve schneidet, die beiden Tangenten in den Schnittpunkten,

so gehen alle diese Geraden durch einen Punkt U, welcher der Pol der Geraden u in Bezug auf die Curve II. Ordnung genannt wird.

Liegt ein Punkt A auf der Curve II. Ordnung, und ist a die Tangente in diesem Punkte, so soll a die Polare von A heissen und umgekehrt A der Pol von a. Dieser Fall kann als Grenzfall des vorigen betrachtet werden. Hierdurch und durch das Vorhergehende ist also jedem Punkte der Ebene eine Polare in Be-

zug auf die Curve II. Ordnung zugeordnet, und umgekehrt jeder Geraden ein Pol.

Wenn in der Ebene einer Curve II. Ordnung ein Punkt gegeben ist, so wollen wir sagen, derselbe liege „ausserhalb“ oder „innerhalb“ der Curve, jenachdem durch ihn zwei oder keine Tangenten an die Curve gelegt werden können. Die sämmtlichen Punkte einer Tangente liegen also ausserhalb der Curve; nur der Berührungspunkt liegt „auf“ der Curve. Jede Gerade, welche in der Ebene der Curve liegt, enthält unendlich viele Punkte, welche ausserhalb der Curve liegen, weil die Gerade mit jeder Tangente einen Punkt gemein hat; und zwar folgen diese Punkte stetig auf einander, weil die Tangenten stetig aufeinander folgen. Alle Punkte einer Geraden, welche innerhalb der Curve liegen, folgen daher auch stetig auf einander. Wenn also die Verbindungslinie von zwei ausserhalb der Curve gelegenen Punkten von der Curve geschnitten wird, so sind diese Punkte nicht durch die Schnittpunkte von einander getrennt, sondern man kann auf der ausserhalb der Curve liegenden Strecke der Geraden von A nach B gelangen (nöthigenfalls, indem man durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht), ohne einen Curvenpunkt zu überschreiten. Ebenso sind zwei innerhalb der Curve liegende Punkte nicht durch die Curve von einander getrennt, sondern liegen auf einer von der Curve eingeschlossenen Strecke ihrer Verbindungslinie. Von zwei Punkten dagegen, welche durch die Curve von einander getrennt sind, liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Curve; denn sie können nach dem eben Bewiesenen weder beide innerhalb, noch beide ausserhalb der Curve liegen. Also:

„Eine Ebene wird durch eine in ihr liegende Curve II. Ordnung „in zwei Theile zerlegt. Von einem beliebigen Punkte des „einen Theils kann man zu jedem anderen Punkte desselben „Theiles, dagegen zu keinem Punkte des anderen Theiles ge„langen, ohne die Curve zu überschreiten. Die Punkte des „einen Theiles liegen ausserhalb der Curve, und es lassen sich „von ihnen je zwei Tangenten an die Curve ziehen; die Punkte „des anderen Theiles liegen innerhalb der Curve, und durch „sie gehen keine Tangenten.“

Ein innerhalb der Curve gelegener Punkt ist somit von jedem Punkte seiner Polare harmonisch getrennt durch die Curve, und jede durch ihn gelegte Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten,

während seine Polare nicht von der Curve geschnitten wird. Ein ausserhalb der Curve gelegener Punkt R dagegen ist nicht von jedem Punkte seiner Polare durch die Curve getrennt; sondern zieht man durch R die beiden Tangenten an die Curve, so begrenzen dieselben auf der Polare eine Strecke, deren sämmtliche Punkte von R harmonisch getrennt sind. Die Curve nebst allen von ihr eingeschlossenen Punkten ist in dem einen der beiden vollkommenen Winkel enthalten, welche von zwei Tangenten gebildet werden.

Wir werden von diesen Sätzen, die Ihnen vielleicht als selbstverständlich erscheinen, aber nach meiner Ansicht des Beweises gleichwohl bedurften, später mehrfach Gebrauch machen. Zunächst beweise ich mit ihrer Hülfe folgenden Hauptsatz der Polarentheorie:

Die Polaren der sämmtlichen Punkte einer Geraden u gehen durch den Pol U dieser Geraden. Liegt ein Punkt von u innerhalb der Curve II. Ordnung, so ist er von U harmonisch getrennt, und seine Polare muss deshalb durch U gehen. Liegt aber irgend ein Punkt R von u (Figg. 41 und 42) ausserhalb der Curve, so kann man durch ihn zwei Tangenten an die Curve ziehen. Und die Gerade, welche den Berührungspunkt der einen dieser Tangenten mit U verbindet, ist die Polare von R, weil ihr Pol sowohl auf u als auch auf jener Tangente liegen muss. Liegt endlich ein Punkt von u auf der Curve, so ist die Tangente in demselben seine Polare; diese aber geht gleichfalls durch U.

Die Pole der sämmtlichen Strahlen eines Punktes U liegen auf der Polare u dieses Punktes. Wenn ein Strahl von U die Curve II. Ordnung schneidet, so erhält man den Pol derselben, indem man an den Schnittpunkten Tangenten construirt und deren Schnittpunkt sucht. Dieser aber liegt, wie vorhin bewiesen, auf der Polare u von U. Schneidet aber irgend ein Strahl von U die Curve nicht, so liegt sein Pol innerhalb der Curve, ist also von jedem Punkte des Strahles und folglich auch von U harmonisch getrennt, also wieder auf u gelegen. Berührt endlich ein Strahl die Curve, so liegt der Berührungspunkt auf u und ist zugleich der Pol jenes Strahles.

Durch diese und die vorhergehenden Sätze ist das Gesetz der Reciprocität, auf welches ich später noch einmal zurückkommen werde, wenigstens für das ebene System oder überhaupt

für Grundgebilde der zweiten Stufe bewiesen. Denn zu jedem ebenen Gebilde können wir mit Hülfe einer Curve II. Ordnung ein reciprokes ebenes Gebilde construiren, indem wir zu jedem Punkte des ersteren die Polare, zu jeder Geraden den Pol bestimmen. Daher wird es künftig genügen, wenn ich für ebene Gebilde von je zwei reciproken Sätzen immer nur den einen beweise.

Mit Hülfe der Polaren hat Brianchon seinen Lehrsatz aus demjenigen des Pascal abgeleitet. Zu jeder Seite des einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Sechecks construirte er nämlich den Pol, indem er in den beiden auf der Seite gelegenen Eckpunkten Tangenten construirte und deren Schnittpunkt suchte (Fig. 43). Den Seiten und Eckpunkten des eingeschriebenen Sechsecks entsprechen also die Eckpunkte und Seiten des umschriebenen Sechsecks; und der Schnittpunkt von zwei beliebigen Seiten des ersteren hat zur Polare die Verbindungslinie der entsprechenden Eckpunkte des letzteren. Da nun die drei Punkte, in welchen die drei Paar Gegenseiten des eingeschriebenen Sechsecks sich schneiden, in einer Geraden u liegen, so gehen auch die drei Geraden, welche die drei Paar Gegenpunkte des umschriebenen Sechsecks verbinden, durch einen Punkt U, den Pol jener Geraden u.

Sie ersehen schon aus dieser einen Anwendung, welcher Nutzen aus der Polarentheorie gezogen werden kann. Mit Hülfe einer Curve II. Ordnung kann jetzt z. B. zu jeder ebenen Curve ein Strahlenbüschel gefunden werden, welcher jener Curve reciprok ist, indem jeder Punkt der Curve einen Strahl des Büschels zur Polare hat. Und den Eigenschaften der Curve werden Eigenschaften des Büschels entsprechen. Wir werden später noch allgemeinere Beziehungen dieser Art zu untersuchen haben.

Sind P und Q zwei beliebige Punkte einer Geraden u (Figg. 41 und 42), so gehen dem obigen Hauptsatze zufolge ihre Polaren p und q durch den Pol U von u. Wir wollen nun P irgendwo auf u, dagegen Q im Schnittpunkte von u und p annehmen; dann bilden P, Q und U die Eckpunkte und ihre Polaren p, q und u die ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks. Dasselbe wird ein „Poldreieck der Curve II. Ordnung“ genannt; jeder Eckpunkt desselben ist der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite. Für solche Poldreiecke gilt, wie ohne Weiteres einleuchtet, der Doppelsatz (vgl. auch Fig. 37).

Die drei Paar Gegenseiten jedes vollständigen Vierecks,	Die drei Paar Gegenpunkte jedes vollständigen Vierseits,

welches einer Curve II. Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich in den Eckpunkten eines Poldreiecks der Curve.

welches einer Curve II. Ordnung umschrieben ist, liegen auf den Seiten eines Poldreiecks der Curve (Seite 78).

Zu jedem Poldreieck PQU können unendlich viele der Curve eingeschriebene Vierecke construirt werden, deren drei Paar Gegenseiten sich in P, Q und U schneiden. Man lege durch P eine Secante $\overline{BC}$ an die Curve (Figg. 41 und 42), verbinde die beiden Curvenpunkte B und C derselben mit dem Punkte U und bringe die Geraden $\overline{BU}$ und $\overline{CU}$ in resp. D und A zum zweiten Male mit der Curve zum Durchschnitt; dann ist $ABCD$ eines jener unendlich vielen eingeschriebenen Vierecke, wie Sie leicht selbst beweisen werden.

Werden nun von dem eingeschriebenen Viereck die Eckpunkte A und C nebst dem Punkte U festgehalten, der Punkt P aber auf der Polare u von U verschoben, so bewegt sich der Eckpunkt B auf der Curve; die Geraden $\overline{PB}$ und $\overline{QB}$ beschreiben folglich um die Mittelpunkte C und A zwei projectivische Strahlenbüschel und also auch die Punkte P und Q zwei projectivische Punktreihen, welche Schnitte jener Strahlenbüschel sind. Wir schliessen daraus, dass der Strahlenbüschel, welchen die Polare $\overline{UQ}$ oder p des Punktes P um U beschreibt, während P die Punktreihe u durchläuft, zu dieser Punktreihe projectivisch ist. Also:

Wenn ein Punkt P *eine Punktreihe* u *beschreibt, so beschreibt gleichzeitig seine Polare* p *einen Strahlenbüschel* U, *welcher zu der Punktreihe projectivisch ist.*

Durch diesen Satz wird die Abhängigkeit, in welcher eine beliebige Figur zu ihrer Polarfigur steht, näher angegeben. Wir schliessen z. B. aus demselben Folgendes:

„Sind in einer Ebene zwei Curven II. Ordnung $\varkappa$ und λ ge„geben, und bestimmen wir zu jedem Punkte der einen $\varkappa$ die „Polare in Bezug auf die andere Curve λ, so umhüllen alle „diese Polaren eine dritte Curve II. Ordnung.“

Denn denken wir uns $\varkappa$ durch zwei projectivische Strahlenbüschel U und V erzeugt, so entsprechen diesen zwei Punktreihen u und v, welche zu den Strahlenbüscheln, und folglich auch zu einander projectivisch sind. Diese Punktreihen erzeugen den Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher jene dritte Curve II. Ordnung umhüllt.

In der Theorie der Curven II. Ordnung werden noch die folgenden Bezeichnungen häufig angewendet:

Zwei Punkte der Ebene heissen conjugirt bezüglich einer Curve II. Ordnung, wenn der eine und folglich jeder auf der Polare des anderen liegt.

Zwei Gerade der Ebene heissen conjugirt bezüglich einer Curve II. Ordnung, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der anderen geht.

Ein Punkt ist also jedem Punkte seiner Polare, und eine Gerade ist jeder durch ihren Pol gehenden Geraden conjugirt. Die Eckpunkte und ebenso die Seiten jedes Poldreiecks der Curve sind paarweise einander conjugirt. Ein auf der Curve II. Ordnung liegender Punkt ist auch sich selbst conjugirt, weil er auf seiner Polare, der Tangente, liegt; und eine Tangente der Curve ist sich selbst conjugirt, weil sie durch ihren Pol, den Berührungspunkt, hindurchgeht.

Wenn die Verbindungslinie von zwei conjugirten Punkten A und B die Curve II. Ordnung schneidet, so sind A und B durch die beiden Schnittpunkte harmonisch getrennt. Denn die Polare von A geht durch B und enthält alle Punkte, die von A durch zwei Curvenpunkte harmonisch getrennt sind.

Wenn aus dem Schnittpunkte von zwei conjugirten Geraden a und b Tangenten an die Curve II. Ordnung möglich sind, so sind a und b durch diese Tangenten harmonisch getrennt. Denn der Pol von a liegt auf b und durch ihn gehen alle Strahlen, die von a durch zwei Tangenten der Curve harmonisch getrennt sind.

Die Curve II. Ordnung schliesst deshalb von jedem Poldreieck einen Eckpunkt ein und die übrigen beiden aus; sie schneidet zwei von den Seiten des Poldreiecks, nicht aber die dritte.

Aus der Erklärung der conjugirten Punkte und Geraden folgt weiter:

Wenn zwei Punkte A und B demselben dritten C conjugirt sind, so ist die Gerade $\overline{AB}$ die Polare von C. Denn die Polare von C muss sowohl durch A als auch durch B gehen.

Wenn zwei Gerade a und b derselben dritten c conjugirt sind, so ist der Schnittpunkt ab der Pol von c. Denn dieser Pol muss sowohl auf a als auch auf b liegen.

Sind u und v zwei Gerade der Ebene, welche einander nicht conjugirt sind, so können wir jedem Punkte P von u den ihm conjugirten Punkt P_1 von v zuweisen; die Punktreihen u und v sind dadurch auf einander projectivisch bezogen. Denn v erscheint dann als Schnitt des Strahlenbüschels U, welcher aus den Polaren der sämmtlichen Punkte von u besteht und (nach Seite 82) zu der Punktreihe u projectivisch ist. Die Verbindungslinien von

je zwei conjugirten Punkten P und P_1 der Geraden u und v bilden also einen Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung, jenachdem der Schnittpunkt uv sich selbst conjugirt ist (d. h. auf der Curve II. Ordnung liegt), oder nicht. Da P den Punkten P_1 und U gleichzeitig conjugirt ist, so ist $\overline{P_1 U}$ die Polare von P, und $\overline{PP_1}$ der Geraden $\overline{P_1 U}$ conjugirt. Jenen Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung erhalten wir also auch, wenn wir durch jeden Punkt P_1 von v denjenigen Strahl legen, welcher der Geraden $P_1 U$ conjugirt ist.

Sind andererseits U und V zwei nicht conjugirte Punkte der Ebene, so können wir jedem Strahle p von U den ihm conjugirten Strahl p_1 von V zuweisen; die Strahlenbüschel U und V sind dadurch projectivisch auf einander bezogen. Denn U ist dann ein Schein der Punktreihe v, welcher die Pole der sämmtlichen Strahlen von V angehören, und welche zu dem Strahlenbüschel V projectivisch ist. Die Büschel U und V erzeugen daher eine Punktreihe erster oder zweiter Ordnung, jenachdem der gemeinschaftliche Strahl $\overline{UV}$ sich selbst conjugirt ist (d. h. die gegebene Curve II. Ordnung berührt), oder nicht. Da p_1 den Strahlen p und v gleichzeitig conjugirt ist, so ist pv der Pol von p_1, und der Punkt $p_1 p$ dem Punkte pv conjugirt. Jene Punktreihe I. oder II. Ordnung erhalten wir also auch, wenn wir in jedem Strahle p von U denjenigen Punkt bestimmen, welcher zu dem Punkte pv conjugirt ist. Wir erhalten folglich die Sätze:

Sind in der Ebene einer Curve II. Ordnung eine Gerade v und ein nicht auf derselben liegender Punkt U gegeben, und

bestimmen wir in jedem Strahle von U denjenigen Punkt, welcher dem Schnittpunkt des Strahles mit der Geraden v conjugirt ist, so liegen alle diese Punkte in einer Curve II. Ordnung, welche durch den Pol V der Geraden v, durch U und die Berührungspunkte der beiden Tangenten hindurchgeht, die von U an die gegebene Curve II. Ordnung etwa gezogen werden können. Nur wenn v durch einen dieser Berührungspunkte geht, also die Gerade $\overline{UV}$ eine Tan-

wird durch jeden Punkt von v derjenige Strahl gelegt, welcher der Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Punkte U conjugirt ist, so umhüllen alle diese Strahlen eine Curve II. Ordnung, welche von der Polare u des Punktes U, von v und den Tangenten der beiden Punkte berührt wird, in denen die gegebene Curve II. Ordnung etwa von v geschnitten wird. Nur wenn U auf einer dieser beiden Tangenten liegt, also der Punkt uv der gegebenen Curve II. Ord-

gente der gegebenen Curve II. Ordnung ist, erhalten wir ein gerades Gebilde statt einer Curve II. Ordnung.*)

nung angehört, erhalten wir einen Strahlenbüschel I. Ordnung statt der sämmtlichen Tangenten einer Curve II. Ordnung.

Werden also links die gegebene Curve II. Ordnung und der Punkt U festgehalten, so entspricht jedem Punkt der Ebene ein conjugirter Punkt, welcher mit dem ersteren auf einem Strahle von U liegt; jeder Geraden dagegen entspricht im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung. Werden ebenso rechts die gegebene Curve II. Ordnung und die Gerade v festgehalten, so entspricht jedem Strahl der Ebene ein conjugirter Strahl, welcher den ersteren in einem Punkte von v schneidet; jedem Strahlenbüschel I. Ordnung entspricht dagegen im Allgemeinen ein Strahlenbüschel II. Ordnung. Wir gelangen auf diese Weise zu zwei besonderen Fällen der sogenannten „geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades".

Aus unserer Beweisführung (Seite 83 und 84) ergeben sich noch folgende Sätze:

Ist ein Dreieck AMB_1 (Fig. 44) einer Curve II. Ordnung eingeschrieben, so schneidet jede Gerade, welche der einen Seite $\overline{AB_1}$ conjugirt ist, die beiden anderen Seiten in zwei conjugirten Punkten. Und wenn umgekehrt eine Gerade von zwei Seiten des Dreiecks in conjugirten Punkten geschnitten wird, so geht sie durch den Pol der dritten Seite.

Ist ein Dreieck UVW (Fig. 45) einer Curve II. Ordnung umschrieben, so wird jeder Punkt, welcher dem einen Eckpunkte W conjugirt ist, aus den beiden anderen Eckpunkten durch zwei conjugirte Strahlen projicirt. Und wenn umgekehrt ein Punkt aus zwei Eckpunkten des Dreiecks durch conjugirte Strahlen projicirt wird, so liegt er auf der Polare des dritten Eckpunktes.

Die Punktreihen $\overline{AM}$ oder u und $\overline{B_1M}$ oder v (Fig. 44) sind nämlich perspectivisch auf einander bezogen, wenn jedem Punkte

*) Als besonderer Fall des Satzes links ist der folgende zu erwähnen: „Die Halbirungspunkte der sämmtlichen Sehnen einer Curve II. Ordnung, „welche nach einem beliebig gegebenen eigentlichen Punkte convergiren, „liegen auf einer anderen Curve II. Ordnung."
Die Gerade v liegt in diesem Falle unendlich fern, und jeder der Halbirungspunkte ist durch die Curve von einem unendlich fernen Punkte harmonisch getrennt, also demselben conjugirt.

von u sein conjugirter Punkt in v als entsprechender zugewiesen wird; denn der gemeinschaftliche Punkt M von u und v ist sich selbst conjugirt. Der Mittelpunkt S des von u und v erzeugten Strahlenbüschels muss aber auf der in A construirten Tangente liegen, weil der Schnittpunkt A_1 derselben mit v dem Punkte A conjugirt ist; und ebenso liegt S auf der Tangente des Punktes B_1. Folglich ist S der Pol von $\overline{AB_1}$, und jede durch S gelegte Gerade schneidet u und v in zwei conjugirten Punkten. — Den Satz rechts können Sie ganz analog beweisen; seine Richtigkeit folgt aber auch aus dem Gesetz der Reciprocität.

Ich schliesse diese Reihe von Sätzen, indem ich Ihnen noch den folgenden beweise, welcher sich auch umkehren lässt:

„Wird eine Curve II. Ordnung von zwei conjugirten Strahlen „$\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ geschnitten (Fig. 46), so sind die Schnittpunkte „A, B, C, D vier harmonische Punkte, und die Tangenten a, „b, c, d in demselben vier harmonische Tangenten der Curve.“

Der Pol Q von $\overline{AC}$, in welchem die Tangenten a und c sich schneiden, muss auf der Geraden $\overline{BD}$ liegen, weil diese zu $\overline{AC}$ conjugirt sein soll; ebenso liegt der Schnittpunkt R von b und d auf $\overline{AC}$. Bezeichnen wir noch mit P den Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, so sind P, B, Q, D vier harmonische Punkte und $\overline{RQ}$, b, $\overline{RP}$, d vier harmonische Strahlen. Also sind auch die Strahlen $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, c, $\overline{CD}$ vier harmonische Strahlen, und die Punkte ca, cb, C, cd vier harmonische Punkte; d. h. die Punkte A, B, C, D werden aus C und folglich aus jedem Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt, und die Tangenten a, b, c, d werden von c und folglich von jeder Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Alle für die Curve II. Ordnung soeben aufgestellten Sätze lassen sich wieder sofort auf die Kegelfläche II. Ordnung übertragen, weil letztere durch eine Ebene, die nicht den Mittelpunkt enthält, in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird. Ich wiederhole hier nur folgenden Satz:

„Ist in einem Strahlenbündel eine Kegelfläche II. Ordnung und „ein nicht auf derselben gelegener Strahl s gegeben, und legt „man durch s beliebig viele, die Kegelfläche schneidende Ebenen, „und bestimmt:

„1) in jeder Ebene den Strahl, welcher von s durch die Kegelfläche harmonisch getrennt ist,

„2) die gemeinschaftliche Gerade der beiden Ebenen, welche die Kegelfläche in den Schnittlinien jeder Ebene berühren,
„3) in jedem der Kegelfläche eingeschriebenen Vierkant, dessen Diagonalebenen irgend zwei jener durch s gelegten Ebenen sind, die Schnittlinien der Gegenseiten,
„4) den Berührungsstrahl jeder Berührungsebene, welche durch s an die Kegelfläche gelegt werden kann,
„so liegen alle diese Strahlen in einer Ebene Σ, welche die „Polarebene des Strahles s genannt wird."

Ich überlasse es Ihnen, auch die übrigen Sätze der Polarentheorie auf die Kegelfläche zu übertragen, und bemerke nur noch, dass s der „Polstrahl" der Ebene Σ bezüglich der Kegelfläche II. Ordnung genannt werden kann.

Neunter Vortrag.*)

Durchmesser und Axen der Curven zweiter Ordnung. Gleichungen derselben.

Aus den Sätzen über Pol und Polare ergiebt sich:

„Werden in einer Curve II. Ordnung beliebig viele, zu einander „parallele Sehnen gezogen, so liegen die Halbirungspunkte dieser „Sehnen auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der „Curve genannt wird" (vergl. Fig. 47).

Denn da alle diese Halbirungspunkte durch die Curve harmonisch getrennt sind von dem unendlich fernen Punkte der parallelen Sehnen, so liegen sie auf der Polare dieses Punktes. Also:

Die Polare jedes unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser der Curve II. Ordnung.

Auf dem Durchmesser liegen auch die Berührungspunkte der beiden Tangenten, welche parallel zu den vom Durchmesser halbirten Sehnen an die Curve II. Ordnung gezogen werden können. Je zwei Tangenten, die in den Endpunkten einer solchen Sehne die

*) Als Anhang zu der „reinen" Geometrie der Lage zu betrachten.

Curve II. Ordnung berühren, schneiden sich in einem Punkte des Durchmessers (Seite 78); die Sehne ist dem Durchmesser conjugirt.

Wir fanden früher (Seite 80), dass die Polaren der sämmtlichen Punkte einer Geraden sich im Pole dieser Geraden schneiden. Für die Durchmesser einer Curve II. Ordnung lautet dieser Satz:

Sämmtliche Durchmesser einer Curve II. Ordnung schneiden sich in einem Punkte, nämlich im Pole der unendlich fernen Geraden.

Ist die Curve eine Parabel, so wird dieselbe von der unendlich fernen Geraden berührt, und der Berührungspunkt selbst ist (nach Seite 78) der Pol der unendlich fernen Geraden; oder:

„Die Durchmesser einer Parabel sind parallel, und gehen durch „den unendlich fernen Punkt der Parabel."

Ist dagegen die Curve eine Ellipse oder Hyperbel, so ist der Pol der unendlich fernen Geraden ein eigentlicher Punkt; derselbe soll „Mittelpunkt" der Curve II. Ordnung heissen, weil ihm folgende Eigenschaft zukommt:

„Jede Sehne einer Curve II. Ordnung, welche durch den Mittel- „punkt hindurchgeht, wird in letzterem halbirt."

Der Mittelpunkt nämlich ist von dem unendlich fernen Punkte der Sehne harmonisch getrennt durch die beiden Punkte, welche die Sehne mit der Curve II. Ordnung gemein hat.

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt, wie sich aus folgendem Satze ergiebt:

„Wenn zwei Sehnen einer Curve II. Ordnung sich gegenseitig „halbiren, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der unendlich fernen „Geraden, und die Sehnen selbst sind folglich Durchmesser der „Curve."

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennen Sie daraus, dass jener Schnittpunkt von den unendlich fernen Punkten der Sehnen durch die Curve harmonisch getrennt ist. Da nun der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Parabel identisch ist mit dem unendlich fernen Punkte der Parabel, so giebt es keine zwei Parabelsehnen, die einander halbiren.

„Im Mittelpunkte einer Hyperbel schneiden sich die Asymp- „toten derselben";

denn durch den Pol einer Geraden gehen allemal die Tangenten derjenigen Punkte, welche die Gerade mit der Curve II. Ordnung gemein hat. — Der Mittelpunkt einer Hyperbel liegt ausserhalb, derjenige der Ellipse innerhalb der Curve (Seite 79).

Zu jedem Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel giebt es einen conjugirten Durchmesser; von zwei conjugirten Durchmessern geht jeder durch den unendlich fernen Pol des anderen.

„Jede Sehne einer Ellipse oder Hyperbel, welche zu dem einen „von zwei conjugirten Durchmessern der Curve parallel läuft, „wird durch den anderen halbirt“;

denn sie geht durch den Pol des letzteren. Schneidet von zwei conjugirten Durchmessern der eine die Curve, so sind die Tangenten in den beiden Schnittpunkten dem anderen Durchmesser parallel. Hiernach kann zu jedem Durchmesser leicht der conjugirte gefunden werden.

„Von jedem einer Curve II. Ordnung umschriebenen Paralle„logramm sind die Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser.“

„Von jedem einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Pa„rallelogramm sind die Seiten zwei conjugirten Durchmessern „parallel.“

Die Diagonalen sowohl des eingeschriebenen als auch des umschriebenen Parallelogramms (Fig. 48) sind Durchmesser der Curve, weil ihr Schnittpunkt die unendlich ferne Gerade zur Polare hat (Seite 78). Ziehen wir durch diesen Schnittpunkt zwei Parallelen p, q zu den Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms, so halbirt jede derselben dasjenige Paar Gegenseiten, welches der anderen parallel ist; p und q sind also zwei conjugirte Durchmesser. Auf p und q liegen auch die Pole der vier Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms; oder p und q sind die Diagonalen desjenigen umschriebenen Vierecks, dessen Seiten die Curve II. Ordnung in den Eckpunkten des eingeschriebenen Vierecks berühren. Dieses umschriebene Viereck ist aber ein Parallelogramm, weil die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers parallel sind, und zwar kann es als ein ganz beliebiges, der Curve umschriebenes Parallelogramm betrachtet werden.

Der letzte Satz lässt sich auch so aussprechen:

„Die beiden Sehnen, welche einen beliebigen Punkt einer Ellipse „oder Hyperbel mit den Endpunkten eines Durchmessers ver„binden, sind zwei conjugirten Durchmessern der Curve parallel.“

Sind also von einer Curve II. Ordnung zwei Paare conjugirter Durchmesser und ein Punkt gegeben, so kann man leicht fünf weitere Punkte der Curve finden. Man ziehe denjenigen Durchmesser, welcher durch den gegebenen Punkt P geht, und bestimme dessen zweiten Schnittpunkt Q mit der Curve auf Grund des

Satzes, dass PQ durch den Mittelpunkt halbirt wird. Ueber PQ als Diagonale construire man ferner zwei Parallelogramme, deren Seiten je einem Paare conjugirter Durchmesser parallel sind; dann liegen die zwei Paare neuer Eckpunkte dieser Parallelogramme ebenfalls auf der Curve II. Ordnung. Ebenso können von einer Curve II. Ordnung leicht sechs Tangenten angegeben werden, wenn eine solche und zwei Paare conjugirter Durchmesser bekannt sind.

„Wenn je zwei conjugirte Durchmesser einer Curve II. Ordnung „auf einander senkrecht stehen, so ist die Curve ein Kreis."

Denn in diesem Falle stehen die Seiten jedes eingeschriebenen Parallelogramms senkrecht aufeinander; das Parallelogramm ist also ein Rechteck und seine Diagonalen, d. h. zwei beliebige und folglich alle Durchmesser der Curve haben gleiche Länge.

Dass der Kreis eine Curve II. Ordnung ist, folgt auch aus der Eigenschaft desselben, dass Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen (wie $\angle\ ASB$ und $\angle\ AS_1B$, Fig. 49), einander gleich sind. Denn hiernach wird der Kreis erzeugt durch zwei Strahlenbüschel S und S_1, die einander gleich und daher auch projectivisch sind. Ebenso lässt sich direct zeigen, dass die sämmtlichen Tangenten eines Kreises einen Büschel II. Ordnung bilden. Die Kegelschnitte der Alten, nämlich die Curven, in welchen Kegelflächen mit kreisförmiger Basis durch Ebenen geschnitten werden, sind hiernach auch Curven II. Ordnung; denn eine Kreiskegelfläche wird aus je zwei ihrer Strahlen durch projectivische Ebenenbüschel projicirt. Wir werden später zeigen, dass nicht blos jeder Kegelschnitt eine Curve II. Ordnung, sondern dass auch umgekehrt jede Curve II. Ordnung ein Kegelschnitt ist, oder dass durch jede Curve II. Ordnung Kegelflächen gelegt werden können, die auch Kreise zu Schnittlinien haben.

Da sich die projectivischen Eigenschaften des Kreises auf diese einfache Weise ergeben, so haben alle Autoren, welche wie Steiner und Chasles die neuere Geometrie durch die Rechnung begründen, den Kreis zum Ausgangspunkt für die Untersuchung der Curven II. Ordnung gewählt. Bei diesem Lehrgange ist jedoch der Nachweis erforderlich, dass durch projectivische einförmige Grundgebilde keine anderen Curven II. Ordnung als die Kegelschnitte erzeugt werden können. Denn gäbe es noch andere, so müssten für diese alle für den Kreis aufgestellten Sätze noch besonders bewiesen werden, z. B. die Sätze, dass sie

aus je zwei ihrer Punkte durch projectivische Strahlenbüschel projicirt, und dass ihre sämmtlichen Tangenten von je zwei derselben in projectivischen Punktreihen geschnitten werden. Wenn nämlich auch diese Sätze für den Kreis bewiesen sind, so lassen sie sich direct doch nur auf Schnitte von Kreiskegeln ausdehnen.

„Enthält eine Curve II. Ordnung mehr als ein Paar conjugirter „Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen, so ist sie ein „Kreis."

Denn ziehen wir durch die Endpunkte A und B eines Durchmessers Parallelen zu zwei auf einander senkrechten conjugirten Durchmessern, so erhalten wir ein Rechteck, welches der Curve II. Ordnung und zugleich einem Kreise eingeschrieben ist. Jedes zweite Paar rechtwinkliger conjugirter Durchmesser liefert uns ein zweites solches Rechteck über derselben Diagonale $\overline{AB}$. Der Kreis hat also mit der gegebenen Curve II. Ordnung ausser A und B noch mindestens vier Punkte gemein, und fällt daher ganz mit ihr zusammen (Seite 63).

Stehen zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht, so sollen sie die „Axen", und ihre Schnittpunkte mit der Curve II. Ordnung sollen die „Scheitelpunkte" der letzteren heissen. Nur der Kreis hat mehr als ein Paar Axen, indem je zwei conjugirte Durchmesser ein Axenpaar bilden. Um die Aufgabe zu lösen:

„Von einer Ellipse oder Hyperbel die Axen zu construiren", verfahren wir wie folgt. Wir beschreiben über einem Durchmesser AB der Curve (Fig. 50) aus deren Mittelpunkte einen Kreis, welcher die Tangenten an den Endpunkten jenes Durchmessers und daher auch die Curve schneidet. Jeder von den beiden Halbkreisen, in welche der Kreis durch den Durchmesser zerfällt, liegt dann theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der Curve, und hat daher noch einen Schnittpunkt mit dieser gemein. Die vier Schnittpunkte des Kreises mit der Curve sind die Eckpunkte eines eingeschriebenen Rechtecks, zu dessen Seiten die gesuchten Axen parallel laufen. Es folgt aus dieser Construction:

„Die Ellipse sowohl wie die Hyperbel hat ein Paar Axen."

Eine Axe kann auch definirt werden als ein Durchmesser der Curve II. Ordnung, welcher senkrecht steht auf den ihm conjugirten und durch ihn halbirten Sehnen. Die Parabel hat nur eine Axe; dieselbe enthält die Mittelpunkte aller Sehnen, welche zu der gemeinschaftlichen Richtung der Durchmesser senkrecht

sind. Durch jede Axe zerfällt eine Curve II. Ordnung in zwei symmetrische Hälften.

Zwei conjugirte Gerade sind (Seite 83) harmonisch getrennt durch die beiden Tangenten, welche durch ihren Schnittpunkt an die Curve II. Ordnung gezogen werden können. Also:

„Je zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel sind durch die „Asymptoten harmonisch getrennt. Der eine derselben schneidet „daher die Hyperbel, der andere nicht. Die Axen der Hyperbel „halbiren die Winkel zwischen den Asymptoten“ (Seite 37).

Auf jeder Geraden, welche zu dem einen von zwei conjugirten Durchmessern parallel läuft, wird daher von den Asymptoten eine Strecke eingeschlossen, deren Mittelpunkt auf dem anderen Durchmesser liegt (Seite. 37). Schneidet oder berührt die Gerade die Curve, so fällt der Mittelpunkt der auf ihr enthaltenen Sehne oder andererseits der Berührungspunkt zusammen mit dem Mittelpunkte jener Strecke. Daher die Sätze (vergl. Fig. 52):

„Auf jeder Secante einer Hyperbel sind die beiden Ab- „schnitte, welche zwischen der Curve und ihren beiden Asymptoten „liegen, einander gleich.“

„Der Abschnitt einer Hyperbel-Tangente, welcher zwischen „den Asymptoten liegt, wird im Berührungspunkte halbirt.“

Der erste dieser Sätze kann zu einer sehr einfachen Construction einer Hyperbel benutzt werden, von welcher die Asymptoten und ein eigentlicher Punkt gegeben sind. Auf jeder durch den Punkt gelegten Secante kann sofort der zweite Hyperbelpunkt gefunden werden.

Die Hyperbel wird nur von einer ihrer Axen in zwei Scheitelpunkten geschnitten; die Ellipse hat vier Scheitelpunkte, da sie von jeder ihrer beiden Axen geschnitten wird; die Parabel hat nur einen eigentlichen Scheitelpunkt, weil sie von ihrer Axe zum zweiten Male im unendlich fernen Punkte geschnitten wird.

Eine Hyperbel wird gleichseitig genannt, wenn ihre Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Die Winkel zwischen je zwei conjugirten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel werden (Seite 37) durch die Asymptoten halbirt. Wenn sonach ein Durchmesser sich um den Mittelpunkt dreht, so dreht sich sein conjugirter Durchmesser in entgegengesetztem Sinne, jedoch so, dass die beiden von den Durchmessern beschriebenen Büschel einander gleich werden. Die projectivischen Strahlenbüschel, durch

welche die gleichseitige Hyperbel aus den Endpunkten eines Durchmessers projicirt wird, sind auch einander gleich; denn je zwei einander entsprechende Strahlen derselben sind zu zwei conjugirten Durchmessern parallel (Seite 89), weil sie sich in einem Punkte der Hyperbel schneiden.

Wird der Halbirungspunkt D einer Parabelsehne $\overline{AB}$ (Fig. 51) verbunden mit dem Schnittpunkte C der in A und B construirten Tangenten, so ist die Verbindungslinie ein Durchmesser der Parabel: denn sie ist die Polare des unendlich fernen Punktes von $\overline{AB}$ (Seite 78). Nun sind aber C und D harmonisch getrennt durch die beiden Schnittpunkte von $\overline{CD}$ mit der Parabel, und einer dieser Schnittpunkte liegt unendlich fern. Der andere Schnittpunkt E halbirt also die Strecke $\overline{CD}$; oder:

„Die Gerade, welche den Pol einer Parabelsehne mit dem „Mittelpunkte derselben verbindet, wird durch die Parabel „halbirt."

Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass durch eine Hyperbel die beiden Geraden halbirt werden, welche parallel zu den Asymptoten aus einem beliebigen Punkte der Ebene an die Polare dieses Punktes gezogen werden können.

Dieses sind die wichtigsten metrischen Beziehungen, welche sich aus der Polarentheorie der Curven II. Ordnung schon jetzt ergeben. Aber auch aus den Sätzen über eingeschriebene und umschriebene Vierecke und Dreiecke lassen sich für diese Curven einige nicht unwichtige metrische Relationen ableiten, insbesondere aus dem Satze (vergl. S. 66):

„Die beiden Diagonalen eines der Curve II. Ordnung umschrie- „benen Vierecks BB_1D_1D schneiden sich in einem Punkte S, „welcher mit den beiden Berührungspunkten von je zwei Gegen- „seiten in einer Geraden liegt."

Ist die Curve eine Hyperbel, und werden (wie in Fig. 52) die zwei Paar Gegenseiten des Vierecks gebildet von den Asymptoten und irgend zwei Tangenten derselben, so liegt S auf der unendlich fernen Geraden und die beiden Diagonalen $\overline{BD_1}$ und $\overline{B_1D}$ laufen parallel. Die Dreiecke D_1DB und D_1B_1B, welche dieselbe Grundlinie D_1B haben, sind folglich inhaltsgleich, und ebenso die Dreiecke D_1AD und B_1AB, welche sich von jenen um das gemeinschaftliche Dreieck D_1AB unterscheiden. Also:

„Die Dreiecke, welche von den Asymptoten einer Hyperbel mit be- „liebigen Tangenten derselben gebildet werden, sind inhaltsgleich."

Die parallelen Diagonalen $\overline{BD_1}$ und $\overline{B_1D}$ und der Mittelpunkt A begrenzen auf den Asymptoten proportionale Abschnitte; wir haben:

$$AB : AD_1 = AD : AB_1 \text{ oder } AB \,.\, AB_1 = AD \,.\, AD_1,$$

d. h. das Product der Abschnitte, welche eine Tangente $\overline{BB_1}$ (oder $\overline{DD_1}$) auf den beiden Asymptoten bildet, ist constant. Wir wollen nun durch den Berührungspunkt P der Tangente eine Parallele PQ zu der einen Asymptote bis an die andere ziehen. Dann ergiebt sich, weil P den Abschnitt BB_1 der Tangente halbirt (Seite 92):

$$QP \text{ oder } y = \tfrac{1}{2} AB_1 \text{ und } AQ \text{ oder } x = \tfrac{1}{2} AB.$$

Da nun $AB \,.\, AB_1$ sich nicht ändert, wenn die Tangente $\overline{BB_1}$ in andere Lage gebracht wird, so bleibt auch $x \,.\, y$ constant, wo auch der Punkt P auf der Parabel liegen möge. Also:

„Wählt man die Asymptoten einer Hyperbel zu Axen eines „Systems paralleler Coordinaten, so ist die Gleichung der „Hyperbel $xy = \text{Const.}$“

Damit ist die synthetische Theorie der Hyperbel mit der analytischen in Verbindung gebracht.

In den Elementen der analytischen Geometrie pflegt man die Ellipse und die Hyperbel durch Parallel-Coordinaten auf zwei conjugirte Durchmesser zu beziehen. Indem wir dieses Verfahren auf unsere Curven zweiter Ordnung anwenden, beweisen wir ohne grosse Mühe ihre Identität mit den analytisch durch Gleichungen dargestellten Curven zweiten Grades.

Von den conjugirten Durchmessern $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ (Fig. 53) schneidet mindestens der eine, $\overline{OX}$, die Curve II. Ordnung (Seite 92), und die Tangenten u und u_1 der beiden Schnittpunkte A und C_1 sind dem anderen Durchmesser $\overline{OY}$ parallel. Wir beweisen nun zunächst den Satz:

„Das Product der Strecken AB und C_1B_1, welche eine beliebige „Tangente $\overline{BB_1}$ der Curve II. Ordnung auf den beiden parallelen „Tangenten u und u_1 abschneidet, ist constant.“

Nämlich die drei Tangenten bilden mit irgend einer vierten $\overline{DD_1}$ ein der Curve umschriebenes Viereck, dessen Diagonalen $\overline{BD_1}$ und $\overline{B_1D}$ sich in einem Punkte S des Durchmessers AC_1 schneiden, und aus der Proportion $AB : C_1D_1 = AD : C_1B_1$, die daraus sich ergiebt, folgt sofort, dass $AB \,.\, C_1B_1$ gleich $AD \,.\, C_1D_1$, also constant ist. Dieses constante Product ist positiv, etwa $= + b^2$, wenn die Curve eine Ellipse ist; und zwar ist b der auf $\overline{OY}$ liegende

Halbmesser der Ellipse, wie man leicht findet, wenn man $\overline{DD_1}$ parallel zu $\overline{OX}$ zieht. Im Fall der Hyperbel ist $AB \cdot C_1B_1$ negativ, etwa $= -b^2$, weil die Strecken AB und C_1B_1 entgegengesetzten Sinn haben, und b ist die absolute Grösse der Strecken, welche jede der beiden Asymptoten auf den parallelen Tangenten u und u_1 abschneidet.

Die drei Tangenten u, u_1 und $\overline{BB_1}$, von welchen die letztere im Punkte P die Curve berühren möge, bilden nun ein umschriebenes Dreieck, von welchem B, B_1 und der unendlich ferne Punkt des Durchmessers OY die Eckpunkte sind; die drei Geraden, welche diese Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich folglich in einem Punkte (Seite 66), d. h. der Schnittpunkt R der Geraden $\overline{BC_1}$ und $\overline{B_1A}$ liegt auf der Ordinate y oder QP des Punktes P. Weil aber:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} = \frac{PB_1}{BB_1} = \frac{RP}{AB},$$

so muss $QR = RP = \frac{1}{2}QP$ oder $= \frac{1}{2}y$ sein.

Die Gleichung der Curve II. Ordnung ergiebt sich nun, wenn wir die beiden Seiten der Gleichungen:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} \quad \text{und} \quad \frac{QR}{C_1B_1} = \frac{AQ}{AC_1}$$

mit einander multipliciren und sodann $QR = \frac{1}{2}y$, $AB \cdot C_1B_1 = \pm b^2$, $AC_1 = 2 \cdot AO = 2a$ und $OQ = x$, also auch $QC_1 = a - x$ und $AQ = a + x$ setzen; wir erhalten dann:

$$\pm \frac{y^2}{4b^2} = \frac{a^2 - x^2}{4a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Dieser Gleichung genügen die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes P der Curve II. Ordnung, wenn dieselbe auf zwei conjugirte Durchmesser bezogen wird.

Ist die Curve eine Parabel, so pflegt man zur Ordinatenaxe eine beliebige Tangente $\overline{OY}$ (Fig. 54) zu wählen, und zur Abscissenaxe den Durchmesser $\overline{OX}$, welcher durch den Berührungspunkt O von $\overline{OY}$ geht. Irgend zwei andere Tangenten $\overline{AP}$ und AP_1, welche die $\overline{OY}$ in B und B_1 schneiden, bilden nun zwei Gegenseiten eines Tangentenvierecks, von welchen $\overline{OY}$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene die anderen beiden Gegenseiten sind; und der Schnittpunkt S der beiden Diagonalen dieses Vierecks liegt folglich auf den beiden Geraden $\overline{PP_1}$ und $\overline{OX}$, welche die Berührungspunkte der zwei Paar Gegenseiten verbinden. Da hiernach das Viereck $ABSB_1$ ein Parallelogramm ist und die Drei-

ecke BPS und B_1SP_1 ähnlich sind, ausserdem die Ordinaten PQ und Q_1P_1 oder y und y_1 der resp. Punkte P und P_1 parallel laufen, so ergiebt sich:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{PS}{SP_1} = \frac{BP}{B_1S} = \frac{BP}{AB} \text{ und ebenso } \frac{y}{y_1} = \frac{BS}{B_1P_1} = \frac{AB_1}{B_1P_1}.$$

Beiläufig folgt hieraus:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{AB_1}{B_1P_1} \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},$$

also der schon früher bewiesene Satz, dass zwei beliebige Tangenten AP und AP_1 der Parabel von den übrigen proportional getheilt werden.

Ist nun $AK \parallel \overline{OX}$ und K auf $\overline{OY}$ gelegen, so ergiebt sich:

$$\frac{AK}{OQ_1} = \frac{AB_1}{B_1P_1} = \frac{y}{y_1} \text{ und } \frac{OQ}{AK} = \frac{BP}{AB} = \frac{y}{y_1},$$

und hieraus durch Multiplication:

$$\frac{OQ}{OQ_1} = \frac{y^2}{y_1^2} \text{ oder } \frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1^2};$$

d. h. „die Abscissen x und x_1 der beiden Parabelpunkte P und P_1 „verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Ordinaten.“ Gewöhnlich schreibt man diese Gleichung der Parabel in der Form $y^2 = 2px$, indem man $\frac{y_1^2}{x_1} = 2p$ setzt.

Zehnter Vortrag.

Regelschaaren und Regelflächen.

Durch projectivische einförmige Grundgebilde, welche entweder in derselben Ebene liegen, oder demselben Strahlenbündel angehören, gelangen wir zu den Curven, Büscheln und Kegelflächen II. Ordnung. Wir wollen jetzt untersuchen, ob zwei beliebig zu einander liegende, projectivische Grundgebilde erster Stufe nicht noch andere als die genannten Gebilde II. Ordnung erzeugen können. Zunächst finden wir:

Ein Strahlenbüschel S erzeugt mit einer zu ihm projectivischen Punktreihe u denselben Ebenen-

Ein Strahlenbüschel S erzeugt mit einem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel u dieselbe Punkt-

büschel I. oder II. Ordnung wie mit demjenigen Strahlenbüschel, durch welchen u aus dem Mittelpunkte S projicirt wird. Denn die Ebene, welche irgend einen Punkt von u mit dem entsprechenden Strahle des ersten Büschels verbindet, geht auch durch den entsprechenden Strahl des zweiten Büschels.

reihe I. oder II. Ordnung wie mit demjenigen Strahlenbüschel, in welchem u durch die Ebene von S geschnitten wird. Denn der Punkt, in welchem irgend eine Ebene von u von dem entsprechenden Strahle des ersten Büschels geschnitten wird, liegt auch auf dem entsprechenden Strahle des zweiten Büschels.

Zwei projectivische Strahlenbüschel, die beliebig im Raume liegen, erzeugen (wenigstens unmittelbar) kein neues Gebilde. Denn im Allgemeinen liegen zwei beliebige, einander entsprechende Strahlen nicht in einer Ebene, haben also auch keinen Schnittpunkt gemein. Ebenso erzeugen eine Punktreihe und ein zu derselben projectivischer Ebenenbüschel kein neues Gebilde, weil ein Punkt des ersteren mit der entsprechenden Ebene des letzteren kein drittes Element bestimmt.

Neue Gebilde erhalten wir folglich nur noch durch zwei projectivische Punktreihen oder Ebenenbüschel, die beliebig im Raume liegen. Seien u und u_1 zwei projectivische Punktreihen, die nicht in einer Ebene liegen, so erzeugen dieselben eine Schaar von Strahlen V, von denen jeder zwei homologe Punkte der Punktreihen verbindet. Keine zwei Gerade dieser Schaar, welche eine „Regelschaar“ genannt werden soll, liegen in einer Ebene; denn sonst würden zwei Punkte von u und ebenso zwei Punkte von u_1 in dieser Ebene liegen und folglich u und u_1 selbst, gegen die Annahme. Die sämmtlichen Strahlen der Regelschaar erfüllen eine krumme Fläche (Figg. 55 und 56), welche eine „Regelfläche“ genannt wird, und folgende Eigenschaften hat:

„Die Regelfläche wird noch von einer zweiten Schaar U von „Geraden erfüllt. Jede Gerade der einen Schaar wird von jeder „Geraden der anderen Schaar geschnitten; dagegen liegen keine „zwei Gerade aus einer und derselben Schaar in einer Ebene.“

Jeder Punkt, welcher auf einem Strahle der einen Schaar liegt, ist auch auf einem Strahle der anderen Schaar enthalten.

Jede Ebene, welche durch einen Strahl der einen Schaar geht, enthält auch einen Strahl der anderen Schaar.

Seien nämlich v, v_1, v_2 irgend drei Strahlen der Schaar V, so dass jeder dieser Strahlen zwei einander entsprechende Punkte

von u und u_1 verbindet, und sei u_2 eine Gerade, welche ebenfalls jene drei Strahlen v, v_1, v_2 schneidet. Projiciren wir dann die Punktreihen u und u_1 aus der Axe u_2, so erhalten wir zwei projectivische Ebenenbüschel, welche drei Ebenen $\underline{u_2 v}$, $\underline{u_2 v_1}$ und $\underline{u_2 v_2}$, und folglich alle ihre Ebenen entsprechend gemein haben (vgl. Seite 45). Somit liegen je zwei einander entsprechende Punkte von u und u_1 mit u_2 in einer Ebene, und u_2 wird daher von jedem Strahle der Regelschaar V geschnitten. Dasselbe gilt von jeder anderen Geraden u_3, welche die drei Strahlen v, v_1, v_2 schneidet. Also:

„Die Regelschaar U besteht aus allen Geraden, welche drei beliebige Strahlen v, v_1, v_2 der Regelschaar V schneiden. Ebenso besteht die Schaar V aus allen Geraden, welche drei Strahlen u, u_1, u_2 der Schaar U schneiden."

Jeder Strahl der einen Schaar soll ein „Leitstrahl" der anderen Schaar heissen; jede der beiden Schaaren heisst die „Leitschaar" der anderen.

Die Regelfläche kann also in doppelter Weise durch eine Gerade beschrieben werden, indem diese an drei festen Geraden, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, hingleitet. Die drei festen Geraden sind Leitstrahlen der Regelschaar, welche von der beweglichen Geraden beschrieben wird. Jeden Punkt eines Leitstrahls trifft die bewegliche Gerade einmal; und in jede Ebene, welche durch einen Leitstrahl gelegt werden kann, fällt sie einmal hinein (vergl. Seite 23). Die vorhin aufgestellten Sätze sind hierdurch bewiesen.

Zwei projectivische Ebenenbüschel u und u_1, deren Axen nicht in einer Ebene liegen, erzeugen ebenfalls eine Regelschaar V. Dieselbe erhalten wir auch mittelst der projectivischen Punktreihen u, u_1, von denen das erstere ein Schnitt des Büschels u_1 mit der Geraden u ist, und das letztere ein Schnitt des Büschels u mit der Geraden u_1. Denn jede Gerade, in welcher zwei entsprechende Ebenen jener Büschel sich schneiden, verbindet auch zwei entsprechende Punkte dieser Punktreihen mit einander.

Eine Regelschaar wird von je zwei ihrer Leitstrahlen in projectivischen Punktreihen geschnitten.

Eine Regelschaar wird aus je zwei ihrer Leitstrahlen durch projectivische Ebenenbüschel projicirt.

Denn seien w, w_1, w_2 drei Leitstrahlen der Regelschaar, so dass jeder Strahl der letzteren von w, w_1, w_2 geschnitten wird. Wir erhalten alsdann beliebig viele Strahlen der Regelschaar,

indem wir entweder durch w_2 beliebig viele Ebenen legen, und in jeder derselben die beiden Punkte verbinden, in welchen w und w_1 von ihr geschnitten werden; oder indem wir in w_2 beliebig viele Punkte annehmen, und die Schnittlinie der beiden Ebenen aufsuchen, welche jeder dieser Punkte mit w und w_1 bestimmt. Die Regelschaar wird also von den beiden Leitstrahlen w und w_1 in zwei Punktreihen geschnitten, welche zu dem Ebenenbüschel w_2 perspectivisch liegen; zugleich wird sie aus w und w_1 durch zwei Ebenenbüschel projicirt, welche zu der Punktreihe w_2 perspectivisch liegen, und folglich projectivisch sind.

„Vier Strahlen einer Regelschaar sollen harmonische „Strahlen genannt werden, wenn sie von einem und folglich „von jedem Leitstrahle der Schaar in vier harmonischen Punkten „geschnitten, also auch aus jedem Leitstrahle durch vier har„monische Ebenen projicirt werden."

Sind w und w_1 zwei Leitstrahlen der Regelschaar, so sind durch letztere die Punktreihen w und w_1 projectivisch auf einander bezogen; und wenn irgend vier Strahlen der Regelschaar von w in harmonischen Punkten geschnitten werden, so sind folglich auch ihre Schnittpunkte mit w_1 vier harmonische. Zugleich aber werden die vier Strahlen aus w_1 durch vier harmonische Ebenen projicirt; denn diese Ebenen gehen durch die vier in w liegenden harmonischen Schnittpunkte hindurch.

Durch drei Strahlen a, b, c im Raume, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, ist ein vierter harmonischer Strahl d bestimmt, welcher von einem jener drei, z. B. von b, getrennt ist. Suchen wir auf irgend einer Geraden, welche die drei gegebenen schneidet, zu den Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt, so liegt dieser auf d. Ueberhaupt ist d ein vierter Strahl der Regelschaar, zu welcher die Strahlen a, b, c gehören, und ist in dieser durch a und c harmonisch getrennt von b.

Wenn eine Gerade mehr als zwei Punkte mit einer Regelfläche gemein hat, so fällt sie ganz in letztere hinein; denn sie schneidet dann mehr als zwei Gerade der einen Schaar, muss also ein Leitstrahl dieser Schaar sein und der zweiten Regelschaar angehören. Wegen dieser Eigenschaft wird die Regelfläche zum Unterschiede von anderen geradlinigen Flächen auch wohl eine „Regelfläche zweiter Ordnung" genannt. Eine Ebene, welche die Regelfläche in einem Strahle u der einen Schaar und folglich (nach Seite 97) auch noch in einem Strahle v der anderen Schaar schneidet, hat

deshalb ausser den Geraden u und v keinen Punkt P mit der Fläche gemein. Denn sonst würde jede Gerade, welche durch P geht, und u und v in je einem Punkte schneidet, der Regelfläche angehören, die ganze Ebene also mit letzterer zusammenfallen, was unmöglich ist. Da nun jede dritte Gerade der Ebene, welche durch den Schnittpunkt von u und v hindurchgeht, nur diesen Schnittpunkt uv mit der Regelfläche gemein hat, also dieselbe berührt, so wollen wir sagen, „die Regelfläche werde von der Ebene im Punkte uv berührt".

„Die Anzahl der Berührungsebenen, die durch eine Gerade „an die Regelfläche gelegt werden können, ist gleich der An- „zahl der Punkte, welche die Gerade mit der Regelfläche ge- „mein hat."

Denn da in jeder solchen Berührungsebene ein Strahl der einen (und auch ein Strahl der anderen) Regelschaar enthalten ist, so hat die gegebene Gerade mit diesem Strahle einen Schnittpunkt gemein. Es fallen aber keine zwei dieser Schnittpunkte auf einander, weil keine zwei Strahlen einer Regelschaar in einerlei Ebene liegen. Daraus folgt, dass eine Gerade ganz in die Regelfläche hineinfällt, wenn in ihr mehr als zwei Berührungsebenen derselben sich schneiden.

Denken Sie sich eine Regelschaar durch zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugt, und diese durch eine beliebige Ebene Σ geschnitten, so erhalten Sie in der Ebene zwei projectivische Strahlenbüschel, und jeder Schnittpunkt von irgend zwei homologen Strahlen der letzteren liegt auf einem Strahle der Regelschaar. Denken Sie sich dagegen die Regelschaar durch zwei projectivische Punktreihen erzeugt, und projiciren Sie diese aus einem beliebigen Punkte S, so erhalten Sie zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel, und jede Verbindungsebene von irgend zwei homologen Strahlen der letzteren geht durch einen Strahl der Regelfläche. Daraus ergiebt sich der erste Theil der Sätze:

Eine Regelschaar wird durch jede Ebene Σ, welche keinen Strahl derselben enthält, in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Die sämmtlichen Ebenen, welche die Regelfläche in den Punkten einer solchen Curve II. Ordnung berühren, bilden einen Ebenenbüschel II. Ordnung.

Eine Regelschaar wird aus jedem Punkte S, welcher auf keinem Strahle derselben liegt, durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Die sämmtlichen Punkte, in welchen die Regelfläche von den Ebenen eines solchen Büschels berührt wird, liegen auf einer Curve II. Ordnung.

Um die zweite Hälfte zunächst des Satzes rechts zu beweisen, legen wir durch drei von den Berührungspunkten eine Ebene. Dieselbe schneidet den Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel II. Ordnung, von welchem jene drei Punkte Berührungspunkte sind, und welcher eine Curve II. Ordnung einhüllt. Aber diese Curve II. Ordnung ist identisch mit derjenigen, in welcher die Regelfläche von der Ebene geschnitten wird, weil beide Curven die drei Berührungspunkte und deren drei Tangenten gemein haben. Ganz analog wird der Satz links bewiesen, indem man durch den Schnittpunkt von irgend drei Berührungsebenen einen Büschel von Berührungsebenen an die Regelfläche legt.

Eine Regelfläche II. Ordnung soll ein „einfaches oder einschaliges Hyperboloid" heissen (Fig. 55), wenn sie keine unendlich ferne Gerade enthält, sondern mit der unendlich fernen Ebene eine Curve II. Ordnung gemein hat. Dagegen wird sie ein „hyperbolisches Paraboloid" genannt (Fig. 56), wenn die eine und folglich (Seite 97) jede ihrer beiden Regelschaaren einen unendlich fernen Strahl besitzt. Jede der beiden Regelschaaren eines hyperbolischen Paraboloides wird von je zwei ihrer Leitstrahlen in projectivisch „ähnlichen" Punktreihen geschnitten, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen. Ein hyperbolisches Paraboloid wird auch beschrieben durch eine Gerade, welche an zwei sich nicht schneidenden festen Geraden u und u_1 hingleitet, dabei aber einer festen Ebene parallel bleibt, welche die Richtung von u oder u_1 nicht enthält. Denn die bewegliche Gerade schneidet nicht nur u und u_1, sondern ausserdem die unendlich ferne Gerade der gegebenen Ebene; sie beschreibt also eine Regelfläche, welche einen und folglich noch einen zweiten unendlich fernen Strahl enthält. Das hyperbolische Paraboloid wird von jeder Ebene, welche durch keinen Strahl desselben hindurchgeht, in einer Hyperbel, und nur wenn die Ebene eine ganz bestimmte Richtung enthält, in einer Parabel geschnitten. Die Schnittcurve II. Ordnung geht nämlich durch die beiden Punkte, in welchen die unendlich fernen Strahlen der Fläche von der Ebene geschnitten werden, und diese Punkte fallen nur dann zusammen, wenn die Ebene durch den gemeinschaftlichen Punkt der unendlich fernen Strahlen hindurchgeht.

Das einschalige Hyperboloid wird nicht, wie das hyperbolische Paraboloid, von der unendlich fernen Ebene berührt, sondern von derselben in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Die Be-

rührungsebenen in den unendlich fernen Punkten des Hyperboloides sind daher sämmtlich eigentliche Ebenen, welche (nach Seite 100) sich in einem Punkte S schneiden und einen Ebenenbüschel II. Ordnung bilden. Die von letzterem eingehüllte Kegelfläche S II. Ordnung schmiegt sich dem Hyperboloid an in seiner unendlich fernen Curve, und wird der „Asymptotenkegel" desselben genannt. Jeder Strahl des Asymptotenkegels läuft zu je einem Strahle der beiden Regelschaaren parallel, indem er den unendlich fernen Punkt desselben enthält. Eine beliebige Ebene, welche durch keinen Strahl des einfachen Hyperboloides hindurchgeht, schneidet dasselbe in einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem sie mit der unendlich fernen Curve des Hyperboloides zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemein hat, oder was dasselbe ist, jenachdem sie zu zwei Strahlen, oder nur zu einem oder zu keinem Strahle des Asymptotenkegels parallel ist.

Ich füge noch folgenden Satz hinzu, der sich aus dem Bisherigen ergiebt:

„Wird zu jedem Strahle einer Regelschaar eine Parallele durch „einen beliebig gegebenen Punkt gelegt, so liegen alle diese „Parallelen in einer Ebene oder in einer Kegelfläche II. Ord„nung, jenachdem die Regelschaar einem hyperbolischen Para„boloid oder einem einschaligen Hyperboloid angehört."

Ein hyperbolisches Paraboloid wird „gleichseitig" genannt, wenn die Strahlen seiner beiden Regelschaaren zu zwei auf einander senkrechten Ebenen parallel laufen. Jede Regelschaar des gleichseitigen Paraboloides enthält einen Strahl, welcher die Leitebene und damit auch jeden Strahl der anderen Schaar rechtwinklig schneidet.

Eilfter Vortrag.

Projectivische Verwandtschaft von Elementargebilden.

Durch projectivische einförmige Grundgebilde können fünf Gebilde zweiter Ordnung erzeugt werden, wie wir gesehen haben, nämlich die Curve oder Punktreihe II. Ordnung, der Strahlen-

und der Ebenenbüschel II. Ordnung, die Kegelfläche II. Ordnung und die Regelschaar. Es ist zweckmässig, mit v. Staudt diese fünf Gebilde II. Ordnung und die drei einförmigen Grundgebilde zusammenzufassen unter dem gemeinschaftlichen Namen Elementargebilde. Zu den Elementargebilden gehören dann zwei Punktgebilde, nämlich die Punktreihe I. und II. Ordnung, ferner zwei Ebenengebilde, nämlich der Ebenenbüschel I. und II. Ordnung, und endlich vier Strahlengebilde, nämlich der Strahlenbüschel I. und II. Ordnung, die Kegelfläche II. Ordnung und die Regelschaar.

Mein gegenwärtiger Vortrag nun wird Ihnen zeigen, dass wir auch diese Elementargebilde in analoger Weise auf einander beziehen können, wie es mit den einförmigen Grundgebilden geschehen ist. Das Gebiet unserer Untersuchungen erweitert sich dadurch bedeutend; namentlich erkennen Sie sofort, dass wir auf diese Weise zu einer grossen Anzahl neuer Punkt-, Strahlen- und Ebenen-Gebilde gelangen, die ebenso bemerkenswerthe Eigenschaften besitzen, wie die bisher betrachteten. Zugleich aber werden wir zu weiteren wichtigen Sätzen über die Gebilde II. Ordnung geführt, welche auf anderem Wege schwerlich so leicht sich ergeben möchten.

Zunächst erinnere ich Sie an folgende früher aufgestellte Sätze, welche auch als Definitionen der harmonischen Elemente in Gebilden II. Ordnung aufgefasst werden können:

Vier harmonische Punkte einer Curve II. Ordnung werden aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt (Seite 62).

Vier harmonische Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung werden aus jedem fünften Strahle der Kegelfläche durch vier harmonische Ebenen projicirt (Seite 72).

Vier harmonische Ebenen eines Ebenenbüschels II. Ordnung werden von jeder fünften Ebene des Büschels in vier harmonischen Strahlen geschnitten (Seite 72).

Vier harmonische Strahlen eines Strahlenbüschels II. Ordnung werden von jedem fünften Strahle des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten (Seite 62).

„Vier harmonische Strahlen einer Regelschaar werden von „jedem Leitstrahle der Schaar in vier harmonischen Punkten „geschnitten, und aus jedem Leitstrahle durch vier harmonische „Ebenen projicirt“ (Seite 99).

Wir können nun die früher (Seite 43) aufgestellte Definition der projectivischen Verwandtschaft von Grundgebilden auch auf die Elementargebilde überhaupt ausdehnen, indem wir sagen:

Zwei Elementargebilde heissen projectivisch, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes vier harmonische Elemente des anderen entsprechen.

Es folgt aus dieser Definition, dass zwei Elementargebilde zu einander projectivisch sind, sobald sie zu einem und demselben dritten projectivisch sind.

Auch den Begriff der perspectivischen Lage einförmiger Grundgebilde können wir ausdehnen auf Elementargebilde überhaupt, indem wir sagen:

Zwei ungleichartige projectivische Elementargebilde heissen perspectivisch, wenn jedes Element des einen in dem entsprechenden Elemente des anderen liegt.

Eine Punktreihe II. Ordnung z. B. liegt perspectivisch zu einer durch sie hindurchgehenden Kegelfläche, wenn jedem Strahle der letzteren der auf ihm liegende Punkt der ersteren zugewiesen ist. Eine Punktreihe II. Ordnung wird ferner aus jedem ihrer Punkte durch einen zu ihr perspectivischen Strahlenbüschel projicirt; ein Strahlenbüschel II. Ordnung wird durch jeden seiner Strahlen in einer zu ihm perspectivischen Punktreihe geschnitten, und ebenso eine Regelschaar durch jeden ihrer Leitstrahlen u. s. w. Denn zwei Elementargebilde, von welchen das eine mittelst des anderen in solcher Weise erzeugt ist, sind auch projectivisch, weil vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen entsprechen. Wird jedem Punkte einer Curve II. Ordnung seine Tangente zugewiesen, so ist die Curve auf den sie einhüllenden Strahlenbüschel perspectivisch bezogen; denn je vier harmonische Punkte der Curve werden von vier harmonischen Strahlen des Büschels berührt (Seite 71). Zwei Curven II. Ordnung sind daher projectivisch auf einander bezogen, wenn die beiden sie einhüllenden Strahlenbüschel zu einander projectivisch sind.

Zwei Gebilde II. Ordnung können dadurch projectivisch auf einander bezogen werden, dass man zwei zu ihnen perspectivische einförmige Grundgebilde projectivisch auf einander bezieht. Zwei projectivische Elementargebilde können folglich (nach Seite 50) stets als erstes und letztes in einer Reihe von Elementargebilden betrachtet werden, deren jedes zum folgenden perspectivisch liegt. Auch können zwei Elementargebilde auf eine einzige Art projectivisch auf einander bezogen werden, so dass drei gegebenen

Elementen des einen beziehungsweise drei gegebene Elemente des andern entsprechen; denn dieser Satz ist für einförmige Grundgebilde bereits bewiesen.

Sollen z. B. zwei Punktreihen II. Ordnung k und k_1 (Fig. 57), die in einer Ebene liegen, projectivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C von k die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von k_1 entsprechen, so bezeichnen wir mit S und T_1 die beiden Punkte von k und k_1, welche aus A resp. A_1 durch den Strahl $\overline{AA_1}$ projicirt werden, und projiciren sodann die Punktreihen aus S und T_1 durch zwei Strahlenbüschel $S\,(A\,B\,C\,\ldots)$ und $T_1\,(A_1 B_1 C_1 \ldots)$. Letztere sind projectivisch und liegen, weil sie den Strahl $\overline{AA_1}$ entsprechend gemein haben, perspectivisch. Je zwei homologe Punkte D und D_1 der beiden Punktreihen werden also aus S resp. T_1 durch zwei Strahlen projicirt, die sich auf einer bestimmten Geraden u schneiden.

„Wenn zwei gleichartige projectivische Elementargebilde,
„z. B. zwei Punktreihen II. Ordnung, in einander liegen, so haben
„sie entweder alle oder höchstens zwei Elemente entsprechend
„gemein."

Denn identische Elementargebilde sind zugleich projectivisch.

Zwei Curven II. Ordnung, die in derselben Ebene liegen und einen Punkt S gemein haben, sind projectivisch auf einander bezogen, wenn je zwei Punkte derselben einander zugewiesen werden, die mit S in einer Geraden liegen. Denn beide Curven sind alsdann perspectivisch zu dem Strahlenbüschel S. Jeden von S verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt haben die Curven entsprechend gemein; den Punkt S jedoch nur dann, wenn sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente haben, also einander in S berühren.

Zwei Curven II. Ordnung, die in derselben Ebene liegen und eine gemeinschaftliche Tangente s haben, sind projectivisch auf einander bezogen, wenn je zwei Tangenten derselben einander zugewiesen werden, welche sich in einem Punkte von s schneiden. Denn die Büschel II. Ordnung, welche die Curven einhüllen, sind alsdann perspectivisch zu der Punktreihe s. Die Curven haben jede von s verschiedene gemeinschaftliche Tangente entsprechend gemein; s selbst aber nur dann, wenn sie sich in einem Punkte von s berühren.

Zwei von einander verschiedene Curven II. Ordnung, welche in der links angegebenen Weise auf einander bezogen sind, haben höchstens drei Punkte entsprechend gemein. Denn wenn sie

ausser S noch vier gemeinschaftliche Punkte haben, oder andererseits noch drei gemeinschaftliche Punkte und eine gemeinschaftliche Tangente in S, so sind sie identisch (nach Seite 63). Ebenso können rechts die beiden Curven höchstens drei Tangenten entsprechend gemein haben. Wir werden so zu dem Doppelsatze geführt:

Wenn zwei projectivische Curven II. Ordnung vier Punkte A, B, C, S entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Punkte entsprechend gemein, und sind folglich identisch.

Wenn zwei projectivische Curven II. Ordnung vier Tangenten entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Tangenten entsprechend gemein, und sind folglich identisch.

Wir beweisen den Satz links wie folgt. Die beiden Curven können nur auf eine einzige Art so auf einander bezogen werden, dass den drei Punkten A, B, C der einen dieselben drei Punkte A, B, C der anderen entsprechen. Dieses geschieht aber, indem wir beide Curven auf den Strahlenbüschel S perspectivisch beziehen. Sollen nun die Curven auch den Punkt S entsprechend gemein haben, so haben sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente und sind folglich identisch (Seite 63). — Der Satz rechts ergiebt sich aus dem anderen mittelst des Princips der Reciprocität, welches wir ja für die Ebene bereits bewiesen haben; doch kann ich Ihnen als nützliche Uebung nur empfehlen, einen directen Beweis für denselben aufzusuchen.

Werden die Curven aus einem beliebigen Mittelpunkte durch zwei projectivische Kegelflächen projicirt, so erhalten wir für diese einen ganz analogen Doppelsatz. Ist eine Curve II. Ordnung projectivisch zu einer Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung, und liegen mehr als drei Punkte der Curve auf den ihnen entsprechenden Strahlen, so ist die Curve perspectivisch zu der Regelschaar oder Kegelfläche; denn sie ist identisch mit dem Schnitte derselben, welcher in ihrer Ebene liegt, weil sie zu demselben projectivisch ist und mit ihm mehr als drei Punkte entsprechend gemein hat. Ebenso hat ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einem Strahlenbüschel II. Ordnung oder zu einer Regelschaar, die zu ihm projectivisch sind, perspectivische Lage, wenn mehr als drei seiner Ebenen durch die ihnen entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels oder der Regelschaar hindurchgehen. Projiciren wir nämlich das Strahlengebilde II. Ordnung aus dem Mittelpunkte des Ebenenbüschels, so erhalten wir einen zweiten Ebenenbüschel

II. Ordnung, welcher mit dem ersten identisch ist; denn er ist zu demselben projectivisch, und hat mehr als drei Ebenen mit demselben entsprechend gemein.

Hierher gehört auch der Beweis der Sätze:

Zwei Kegelflächen II. Ordnung, welche verschiedene Mittelpunkte haben, und in der Verbindungslinie s ihrer Mittelpunkte von einer und derselben Ebene berührt werden, schneiden sich in einer Curve II. Ordnung.

Beziehen wir nämlich die Kegelflächen perspectivisch auf den Ebenenbüschel s, so haben sie den Strahl s entsprechend gemein, und je zwei andere einander entsprechende Strahlen der Flächen haben einen Punkt gemein, weil sie in einer (durch s gehenden) Ebene liegen. Die Verbindungsebene von irgend drei Schnittpunkten homologer Strahlen schneidet die Kegelflächen in zwei projectivischen Curven II. Ordnung, welche identisch sind, weil sie nicht nur jene drei Schnittpunkte, sondern auch einen Punkt von s entsprechend gemein haben.

Zwei Curven II. Ordnung, welche in verschiedenen Ebenen liegen, und die Schnittlinie s ihrer Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, liegen auf einer Kegelfläche II. Ordnung.

Beziehen wir die Strahlenbüschel II. Ordnung, welche die Curven umhüllen, perspectivisch auf die Punktreihe s, so haben sie den Strahl s entsprechend gemein (vergl. Seite 105), und je zwei andere homologe Strahlen der Büschel liegen in einer Ebene, weil sie sich auf s schneiden. Aus dem Schnittpunkte von irgend drei Verbindungsebenen homologer Strahlen werden die Strahlenbüschel durch zwei projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt, welche identisch sind, weil sie nicht nur jene drei Ebenen, sondern auch eine durch s gehende Ebene entsprechend gemein haben.

Einfacher noch lässt sich der Beweis so führen. Legen wir links durch drei gemeinschaftliche Punkte der Kegelflächen eine Ebene, so haben die beiden in ihr liegenden Schnittcurven diese drei Punkte gemein, ausserdem aber den Schnittpunkt von s mit der Ebene. Und da beide Curven in letzterem Punkte von derjenigen Geraden berührt werden, in welcher die gemeinschaftliche Berührungsebene der Kegelflächen geschnitten wird, so fallen diese Schnittcurven zusammen (Seite 63). Aehnlich ergiebt sich der Satz rechts.

Beiläufig folgt noch, dass jede Curve II. Ordnung auch als Schnitt von Kreiskegeln betrachtet werden kann. Denn man kann auf unzählige Arten einen Kreis zu einer gegebenen Curve II. Ordnung in eine solche Lage bringen, dass sie einander berühren und in verschiedenen Ebenen liegen, also auch auf einer und derselben Kegelfläche enthalten sind. Die Curven II. Ordnung sind also mit den „Kegelschnitten“ der Alten identisch, und dürfen deshalb im Folgenden auch mit diesem Namen bezeichnet werden.

Wenn ein Strahlenbüschel S I. Ordnung mit einer zu ihm projectivischen Curve s II. Ordnung in einer Ebene, jedoch nicht zu derselben perspectivisch liegt, so gehen höchstens drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Curve, mindestens aber ein Strahl.

Wenn eine Punktreihe I. Ordnung mit einem zu ihm projectivischen Strahlenbüschel II. Ordnung in einer Ebene, jedoch nicht zu demselben perspectivisch liegt, so liegen höchstens drei Punkte der Punktreihe auf den ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels, mindestens aber ein Punkt.

Denn jeder zu der Curve s perspectivische Strahlenbüschel S_1 ist auch zum Büschel S projectivisch, und erzeugt mit diesem im Allgemeinen eine zweite Curve II. Ordnung, die mit der ersten jeden Punkt gemein haben muss, welcher auf dem ihm entsprechenden Strahle von S liegt. Gehen also mehr als drei Strahlen von S durch ihre entsprechenden Punkte von s, so haben die beiden Curven ausser S_1 noch mindestens vier Punkte gemein, sind also identisch, und S liegt perspectivisch zu s. — Da jede Curve II. Ordnung ihre Ebene in zwei getrennte Theile zerlegt, so müssen die beiden Curven, falls sie nicht einander decken, entweder in ihrem gemeinschaftlichen Punkte S_1 einander berühren, oder sie schneiden einander in S_1 und mindestens in noch einem zweiten Punkte P, indem die eine Curve theils innerhalb, theils ausserhalb der anderen liegt. Im letzteren Falle entsprechen die Strahlen $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ einander, und $\overline{SP}$ geht folglich durch den ihm entsprechenden Punkt P der Curve s; im ersteren Falle entspricht dem Strahle $\overline{SS_1}$ von S die gemeinschaftliche Tangente in S_1 und folglich der auf $\overline{SS_1}$ liegende Punkt S_1 der Curve s. Also liegt mindestens ein Punkt der Curve auf dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels.

Ganz analoge Sätze gelten für die Gebilde I. und II. Ordnung im Strahlenbündel. Wir ziehen daraus den Schluss:

Sind ein einförmiges Grundgebilde und ein Elementargebilde II. Ordnung projectivisch auf einander bezogen, und gehen mehr als drei Elemente des einen Gebildes durch die ihnen entsprechenden Elemente des anderen, so liegen die beiden Gebilde perspectivisch, d. h. jedes Element des einen Gebildes geht durch das ihm entsprechende Element des anderen.

Ist das Gebilde II. Ordnung eine Regelschaar, das andere Gebilde also entweder eine Punktreihe oder ein Ebenenbüschel I. Ordnung, so können wir schon dann schliessen, dass dieselben perspectivisch liegen, wenn drei Strahlen der Regelschaar durch die entsprechenden drei Punkte der Punktreihe gehen oder aber in den entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels liegen. Denn der Träger der Punktreihe oder die Axe des Ebenenbüschels ist dann ein Leitstrahl der Regelschaar (Seite 99), weil sie drei Strahlen der letzteren schneidet.

Wie wichtig diese Sätze sind, mögen Sie aus den Folgerungen abnehmen:

Ein Ebenenbüschel I. Ordnung erzeugt mit einer zu ihm projectivischen Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung im Allgemeinen eine „Raumcurve III. Ordnung", welche mit jeder Ebene mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein hat.

Eine Punktreihe I. Ordnung und eine Regelschaar oder ein Strahlenbüschel II. Ordnung, die zu einander projectivisch sind, erzeugen im Allgemeinen einen „Ebenenbüschel III. Ordnung", welcher mit jedem Punkte mindestens eine Ebene und höchstens drei Ebenen gemein hat.

Denn eine Ebene schneidet die Regelschaar oder Kegelfläche in einer zu ihr perspectivischen Punktreihe II. Ordnung, von welcher im Allgemeinen höchstens drei Punkte auf den entsprechenden Ebenen des Büschels liegen.

Wenn eine Punktreihe I. Ordnung u und eine zu ihr projectivische Punktreihe k II. Ordnung in einer Ebene liegen, so bilden die sämmtlichen Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einen „Strahlenbüschel dritter Ordnung", welcher nämlich mit jedem Büschel I. Ordnung der Ebene mindestens einen und

Wenn ein Strahlenbüschel I. Ordnung und ein zu ihm projectivischer Strahlenbüschel II. Ordnung in einer Ebene liegen, so bilden die sämmtlichen Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen eine „Linie dritter Ordnung", welche nämlich mit jeder Geraden der Ebene mindestens einen und höchstens drei

höchstens drei Strahlen gemein hat, falls derselbe nicht einen Theil des Büschels III. Ordnung ausmacht.

Punkte gemein hat, falls die Gerade nicht einen Theil der Linie III. Ordnung bildet.

Denn ist S ein beliebiger zu u perspectivischer und folglich zu k projectivischer Büschel I. Ordnung, so gehen entweder alle, oder höchstens drei Strahlen von S durch die entsprechenden Punkte von k, mindestens aber ein Strahl.

Haben die Punktreihen u und k I. und II. Ordnung einen Punkt P entsprechend gemein, so ist jeder durch P gehende Strahl als Verbindungslinie von zwei (zusammenfallenden) einander entsprechenden Punkten zu betrachten, und der Strahlenbüschel dritter Ordnung enthält den Büschel I. Ordnung P. Die folgenden Sätze sind deshalb nicht als Ausnahmen, sondern als besondere Fälle des eben bewiesenen Satzes zu betrachten.

Wenn eine Punktreihe I. Ordnung u und eine zu ihr projectivische Punktreihe II. Ordnung k zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen Strahlenbüschel I. Ordnung.

Wenn ein Strahlenbüschel I. Ordnung und ein zu ihm projectivischer Strahlenbüschel II. Ordnung zwei Strahlen entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine Punktreihe I. Ordnung.

Möge noch dem Punkte C von u der Punkt C_1 von k entsprechen und sei S derjenige Punkt von k, welcher aus C_1 durch den Strahl $\overline{C_1 C}$ projicirt wird. Beziehen wir dann u und k perspectivisch auf den Strahlenbüschel S, so sind sie auf einander projectivisch so bezogen, dass den drei Punkten A, B, C von u die resp. drei Punkte A, B, C_1 von k entsprechen. Weil aber (Seite 104) die projectivische Verwandtschaft von u und k durch die drei Paare homologer Punkte eindeutig bestimmt ist, so bilden die Verbindungslinien homologer Punkte wirklich einen Strahlenbüschel S I. Ordnung, dessen Mittelpunkt auf der Curve k liegt.

Durch eine Curve II. Ordnung und zwei Gerade a, b, welche mit der Curve je einen Punkt gemein haben, aber weder mit ihr noch mit einander in einer Ebene liegen, ist eine zu der Curve perspectivische Regel-

Durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung und zwei Gerade a, b, welche aus dem Mittelpunkte des Büschels durch zwei Ebenen desselben projicirt werden und sich nicht schneiden, ist eine zu dem Büschel per-

schaar bestimmt, von welcher die beiden Geraden Leitstrahlen sind.

Nämlich die beiden zu der Curve perspectivischen Ebenenbüschel a, b erzeugen die Regelschaar.

spectivische Regelschaar bestimmt, von welcher die beiden Geraden Leitstrahlen sind.

Nämlich die beiden zu dem Ebenenbüschel perspectivischen geraden Gebilde a, b erzeugen die Regelschaar.

Die Leitschaar der Regelschaar enthält die Geraden a, b und ist ebenfalls zu der Curve resp. dem Ebenenbüschel II. Ordnung perspectivisch.

Wenn ein gerades Gebilde und eine Curve II. Ordnung zu einander projectivisch sind und einen Punkt A entsprechend gemein haben, aber nicht in einer Ebene liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspectivische Regelschaar.

Wenn ein Ebenenbüschel I. und ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einander projectivisch sind und eine Ebene entsprechend gemein haben, aber die Axe des ersteren Büschels nicht durch den Mittelpunkt des letzteren geht, so erzeugen sie eine zu ihnen perspectische Regelschaar.

Mögen (links) den Punkten A, B, C des geraden Gebildes die Punkte A, B_1, C_1 der Curve entsprechen; dann ist die zu der Curve perspectivische Regelschaar, welcher die Geraden $\overline{BB_1}$ $\overline{CC_1}$ angehören, auch perspectivisch zu dem geraden Gebilde, weil die drei Punkte A, B, C des letzteren in den ihnen entsprechenden Strahlen der Regelschaar liegen (Seite 109). Der Beweis rechts ist ganz analog zu führen.

Aus einem beliebigen Punkte, welcher nicht in der Ebene der Curve liegt, wird diese durch eine Kegelfläche II. Ordnung, die Regelschaar aber durch einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung projicirt. Und durch eine beliebige Ebene wird der Ebenenbüschel II. Ordnung in einem Strahlenbüschel II. Ordnung, die Regelschaar aber in einer Punktreihe I. oder II. Ordnung geschnitten. Daraus ergiebt sich:

Wenn ein gerades Gebilde und eine Kegelfläche II. Ordnung projectivisch sind, und ein Punkt des ersteren auf dem entsprechenden Strahle des letzteren liegt, so erzeugen die beiden

Wenn ein Ebenenbüschel I. Ordnung und ein Strahlenbüschel II. Ordnung projectivisch sind, und eine Ebene des ersteren durch den entsprechenden Strahl des letzteren geht,

Gebilde einen zu ihnen perspectivischen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung.

so erzeugen die beiden Büschel eine zu ihnen perspectivische Punktreihe I. oder II. Ordnung.

Dieser Satz führt unmittelbar zu dem folgenden, wenn berücksichtigt wird, dass jede Curve II. Ordnung als Schnitt einer Kegelfläche II. Ordnung aufgefasst werden kann:

Wenn ein gerades Gebilde und eine Curve II. Ordnung, welche zu einander projectivisch sind, in einer Ebene liegen und einen Punkt entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspectivischen Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung.

Wenn ein Strahlenbüschel I. Ordnung und ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welche zu einander projectivisch sind, in einer Ebene liegen und einen Strahl entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine zu ihnen perspectivische Punktreihe I. oder II. Ordnung.

„Zwei zu einander projectivische Regelschaaren abc und „$a_1b_1c_1$, von welchen jede die Leitschaar der anderen ist, er„zeugen eine zu ihnen perspectivische Curve II. Ordnung und „zugleich einen zu ihnen perspectivischen Ebenenbüschel II. Ord„nung.“

Die beiden Regelschaaren können nämlich nur auf eine Art projectivisch so auf einander bezogen werden, dass den Strahlen a, b, c der einen Schaar die resp. Strahlen a_1, b_1, c_1 der anderen Schaar entsprechen. Dieses geschieht aber, wenn je zwei Strahlen einander zugewiesen werden, welche die Verbindungsebene der drei Punkte aa_1, bb_1, cc_1 in einem und demselben Punkte schneiden oder aus dem Schnittpunkte der drei Ebenen $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$ durch eine und dieselbe Ebene projicirt werden.

Zwei zu einander projectivische Curven II. Ordnung, welche in einander liegen, erzeugen entweder einen zu ihnen perspectivischen Strahlenbüschel II. Ordnung, oder es giebt einen Punkt, der mit je zwei homologen Punkten der Curven in einer Geraden liegt.

Zwei zu einander projectivische Strahlenbüschel II. Ordnung, welche in einander liegen, erzeugen entweder eine zu ihnen perspectivische Curve II. Ordnung, oder es giebt eine Gerade, auf welcher je zwei homologe Strahlen der Büschel sich schneiden.

Jede zu der einen Curve perspectivische Regelschaar erzeugt nämlich mit ihrer Leitschaar, die wir auf die andere Curve perspectivisch beziehen, einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher

zu allen vier Gebilden perspectivisch ist; und jenachdem der Mittelpunkt dieses Büschels ausserhalb oder auf der Ebene der Curve liegt, entsteht der erstere oder der letztere der beiden im Satze genannten Fälle. — Wenn also von den Geraden, welche je zwei homologe Curvenpunkte verbinden, irgend drei durch einen und denselben Punkt U gehen (Figg. 60 und 61), so schneiden sie sich alle in diesem Punkte.

Zwei zu einander projectivische Curven $ABCD$ und ABC_1D_1 II. Ordnung, welche zwei Punkte A und B entsprechend gemein haben, aber nicht in derselben Ebene liegen, erzeugen ein zu ihnen perspectivisches Strahlengebilde II. Ordnung, nämlich entweder eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung.

Zwei zu einander projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung, welche zwei Ebenen entsprechend gemein haben, aber nicht concentrisch sind, erzeugen ein zu ihnen perspectivisches Strahlengebilde II. Ordnung, nämlich entweder eine Regelschaar oder einen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Denn die zu der Curve $ABCD$ perspectivische Regelschaar oder Kegelfläche, welcher die Strahlen $\overline{CC_1}$ und $\overline{DD_1}$ angehören, ist auch zu der Curve ABC_1D_1 perspectivisch (Seite 106). Die Curven erzeugen eine Kegelfläche, wenn ihre Tangenten in C und C_1 die Gerade $\overline{AB}$ in einem und demselben Punkte schneiden. Denn erzeugten die Curven auch in diesem Falle eine Regelschaar, so würde die Verbindungsebene jener Tangenten ausser dem Strahle $\overline{CC_1}$ der Regelschaar noch einen Leitstrahl derselben enthalten (Seite 97), und daher mit einer oder jeder der Curven noch einen von C oder C_1 verschiedenen, auf diesem Leitstrahl liegenden Punkt gemein haben, was unmöglich ist. Hieraus folgt:

Wenn zwei Curven II. Ordnung in verschiedenen Ebenen liegen, und von der Schnittlinie dieser Ebenen ein und dasselbe Stück AB einschliessen, so giebt es zwei Kegelflächen, von denen jede durch beide Curven geht.

Zwei nicht concentrische Kegelflächen II. Ordnung, welche einem und demselben Flächenwinkel eingeschrieben sind, schneiden sich in zwei Curven II. Ordnung.

Denn die Curven lassen sich auf zweifache Art projectivisch so auf einander beziehen, dass sie die Endpunkte A, B ihrer gemeinschaftlichen Sehne entsprechend gemein haben, und dass die Tangenten von zwei anderen homologen Punkten C und C_1 sich in einem Punkte der $\overline{AB}$ schneiden.

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, folgenden Satz über die perspectivische Lage von Elementargebilden zweiter Ordnung zu beweisen:

Wenn eine Curve und ein Büschel II. Ordnung oder eine Kegelfläche und ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einander projectivisch sind, und fünf Elemente A, B, C, D, E *des ersteren Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen* α, β, γ, δ, ε *des letzteren liegen, so sind die Gebilde zu einander perspectivisch.*

Wir wollen annehmen, das erste Gebilde sei eine Curve II. Ordnung u, und das zweite ein Ebenenbüschel II. Ordnung S; denn auf diesen Fall lassen sich alle übrigen zurückführen. Wir brauchen dann nur zu zeigen, dass ein Strahlengebilde construirt werden kann, welches gleichzeitig zu der Curve und zum Ebenenbüschel perspectivisch ist; denn damit ist bewiesen, dass jeder Punkt der Curve auf der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt.

Ist die Ebene u der Curve ein Element des Büschels S, so erhalten wir in ihr (als Schnitt mit S) einen zu S perspectivischen Strahlenbüschel I. Ordnung $u(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$, welcher auch zur Curve $u(ABCDE)$ perspectivisch liegt, weil mehr als drei Strahlen desselben durch die ihnen entsprechenden Curvenpunkte gehen (Seite 109); der Punkt S liegt daher auf der Curve. Und umgekehrt, wenn S auf der Curve liegt, so projiciren wir letztere aus S durch einen Strahlenbüschel I. Ordnung $S(ABCDE)$, welcher auch zum Ebenenbüschel $S(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ perspectivisch ist, weil mehr als drei Strahlen desselben in den ihnen entsprechenden Ebenen von S liegen; die Ebene u gehört daher dem Ebenenbüschel S als Element an. — Liegt aber der Punkt S nicht auf der Curve, und gehört folglich deren Ebene u nicht zu dem Ebenenbüschel S, so sei A_1 derjenige Curvenpunkt, welcher aus A durch die Ebene α projicirt wird, also der zweite Schnittpunkt dieser Ebene mit der Curve, welcher mit A zusammenfällt, wenn die Curve von α berührt wird. Durch A_1 ziehen wir in der Ebene α eine von $\overline{AA_1}$ verschiedene Gerade g, und projiciren aus dieser die Curve II. Ordnung durch einen Ebenenbüschel I. Ordnung $g(ABCDE)$. Derselbe ist zu dem Ebenenbüschel II. Ordnung S projectivisch und erzeugt mit ihm eine zu beiden perspectivische Regelschaar (Seite 111), weil er mit ihm die Ebene α entsprechend gemein hat; und diese Regelschaar ist auch zu der Curve II. Ordnung perspectivisch, weil vier Strahlen der ersteren

durch die ihnen entsprechenden Punkte der letzteren gehen (Seite 106).

Wenn eine Curve II. Ordnung $ABCDE$ und eine Regelschaar $abcde$ zu einander projectivisch, aber nicht perspectivisch sind, und zwei Punkte A, B der Curve in den ihnen entsprechenden Strahlen a, b der Regelschaar liegen, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspectivischen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar zu einander projectivisch, aber nicht perspectivisch sind, und zwei Ebenen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Strahlen der Regelschaar gehen, so erzeugen die Gebilde eine zu ihnen perspectivische Punktreihe I. oder II. Ordnung.

Die drei Ebenen $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, welche die Punkte C, D, E der Curve mit ihren entsprechenden Strahlen c, d, e der Regelschaar verbinden, schneiden sich in einer Geraden oder in einem Punkte; und der Ebenenbüschel, welcher aus dieser Schnittlinie oder diesem Schnittpunkte die Regelschaar $abcde$ projicirt, ist auch zu der Curve $ABCDE$ perspectivisch.

Zwei projectivische Curven II. Ordnung, welche in derselben Ebene liegen und zwei Punkte entsprechend gemein haben, erzeugen entweder einen zu ihnen perspectivischen Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung, oder es giebt einen Punkt, der auf keiner der beiden Curven, aber mit je zwei einander entsprechenden Punkten derselben in einer Geraden liegt.

Zwei projectivische Strahlenbüschel II. Ordnung, welche zwei Strahlen entsprechend gemein haben, erzeugen entweder eine zu ihnen perspectivische Punktreihe I. oder II. Ordnung, oder es giebt eine Gerade, welche keinem der Büschel angehört, aber von je zwei einander entsprechenden Strahlen derselben in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

Nämlich jede Regelschaar, welche zu der einen Curve perspectivisch ist, erzeugt mit der anderen einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung, und dieser wird von der Ebene der Curve im Allgemeinen in einem Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung geschnitten. Nur wenn der Ebenenbüschel von der II. Ordnung ist und sein Mittelpunkt in der Ebene der Curven liegt, tritt der letzte Fall unseres Satzes ein.

Liegen zwei projectivische Curven II. Ordnung in einer Ebene, ohne dass sie Punkte entsprechend gemein haben, so erzeugen

sie einen Strahlenbüschel höherer Ordnung, von welchem im Allgemeinen höchstens vier Strahlen durch einen Punkt gehen. Gehen nämlich durch einen Punkt S der Ebene mehr als vier solcher Strahlen, so gehen durch denselben unendlich viele derselben; weil ein Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat und zu einer der beiden Curven II. Ordnung perspectivisch ist (etwa eine zu derselben perspectivische Regelschaar projicirt), auch zu der anderen Curve perspectivische Lage hat. Solcher Punkte S können aber nur einzelne vorhanden sein. Ebenso erzeugen zwei projectivische Strahlenbüschel II. Ordnung, die in einer Ebene liegen, eine Curve höherer (nämlich vierter) Ordnung, welche im Allgemeinen mit keiner Geraden mehr als vier Punkte gemein hat. Wir müssen darauf verzichten, schon hier diese und andere Erzeugnisse projectivischer Elementargebilde II. Ordnung eingehend zu besprechen.

Zwölfter Vortrag.

Involutorische Elementargebilde.

Wenn zwei gleichartige Elementargebilde u und u_1 (z. B. zwei Punktreihen) zu einander projectivisch sind und in einander liegen, so kann jedes Element P ihres gemeinschaftlichen Trägers sowohl zu dem einen Gebilde u, als auch zu dem anderen u_1 gerechnet werden, und es entsprechen ihm folglich zwei andere Elemente, eines in u_1 und das andere in u. Im Allgemeinen sind diese beiden dem P entsprechenden Elemente von einander verschieden (wie in Fig. 58, wo den Punkten P, Q, R von u die resp. Punkte P_1, Q_1, R_1 von u_1 entsprechen); doch ist es auch möglich, dass dieselben zusammenfallen (wie in Fig. 59), so dass dem Elemente P ein anderes P_1 doppelt entspricht. Dem Elemente P des ersten Gebildes u entspricht dann das Element P_1 des zweiten u_1, und dem Elemente P des zweiten u_1 entspricht ebenfalls das Element P_1 des ersten Gebildes u.

„Wenn die projectivischen Gebilde u und u_1 nicht alle ihre „Elemente entsprechend gemein haben, aber jedes Element

„derselben einem anderen doppelt entspricht, so wollen wir „sagen, die Gebilde haben involutorische Lage oder sie „liegen involutorisch. Ebenso heissen zwei ungleichartige „projectivische Gebilde, z. B. eine Punktreihe und ein Strahlen„büschel, involutorisch, wenn das eine mit einem Schnitt „oder Schein des anderen involutorisch liegt."

Z. B. zwei projectivische Punktreihen II. Ordnung, welche auf derselben Curve liegen, haben involutorische Lage (Figg. 60 und 61), wenn drei und folglich (Seite 112) alle Verbindungslinien von je zwei einander entsprechenden Punkten sich in einem Punkte schneiden; dagegen liegen sie nicht involutorisch, wenn sie einen zu ihnen perspectivischen Strahlenbüschel II. Ordnung erzeugen. Weist man jedem Punkte einer Geraden u, welche in der Ebene einer Curve II. Ordnung liegt, aber dieselbe nicht berührt, seine Polare bezüglich dieser Curve zu, so erhält man einen Strahlenbüschel I. Ordnung, welcher nicht blos projectivisch auf die Punktreihe u bezogen ist, sondern auch zu derselben involutorische Lage hat (Seite 80 und 82).

Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

„Zwei zu einander projectivische Punktreihen II. Ordnung, welche „auf derselben Curve liegen, haben involutorische Lage, wenn „in ihnen irgend einem Punkte A ein anderer Punkt A_1 doppelt „entspricht."

Seien B und B_1 (Figg. 60 und 61) zwei beliebige andere einander entsprechende Punkte der Punktreihen, so dass den Punkten A, A_1, B der einen Punktreihe die resp. Punkte A_1, A, B_1 der anderen zugewiesen sind; sei ferner U der Schnittpunkt von $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$, und u dessen Polare in Bezug auf die Curve II. Ordnung. Die beiden Strahlenbüschel $B_1(AA_1B)$ und $B(A_1AB_1)$, welche aus den Punkten B_1 und B die resp. Punktreihen AA_1B und A_1AB_1 projiciren, sind alsdann perspectivisch zu dem geraden Gebilde u. Denn sie sind zu den Punktreihen II. Ordnung und folglich zu einander projectivisch, und weil sie den Strahl $\overline{B_1B}$ oder $\overline{BB_1}$ entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines und desselben geraden Gebildes; dieses gerade Gebilde liegt aber in u, weil (Seite 78) der Schnittpunkt der einander entsprechenden Strahlen $\overline{B_1A}$ und $\overline{BA_1}$, sowie derjenige von $\overline{B_1A_1}$ und $\overline{BA}$ auf der Geraden u enthalten ist. Je zwei andere Curvenpunkte C und C_1, welche mit U in einer Geraden liegen, werden ebenso durch zwei Paare homologer Strahlen der zu u

perspectivischen Büschel B und B_1 projicirt, und sind daher zwei einander doppelt entsprechende Punkte der Punktreihen II. Ordnung. Hieraus und aus früher (Seite 78) aufgestellten Sätzen folgt:

„Wenn zwei projectivische Curven II. Ordnung involutorisch „liegen, so schneiden sich die sämmtlichen Verbindungslinien „homologer Punkte in einem und demselben Punkte U, und die „sämmtlichen Schnittpunkte homologer Tangenten liegen auf der „Polare u dieses Punktes U. Die Gerade u wird die Involutions-„axe und der Punkt U das Involutionscentrum der Curven „genannt."

Die beiden Strahlenbüschel II. Ordnung, durch welche zwei involutorisch liegende Curven II. Ordnung eingehüllt werden, haben ebenfalls involutorische Lage, denn die Tangenten von je zwei einander entsprechenden Punkten müssen einander gleichfalls in doppelter Weise entsprechen. Die Strahlenbüschel werden daher auch von jedem ihrer Strahlen in zwei involutorisch liegenden Punktreihen I. Ordnung geschnitten. Ebenso werden zwei involutorisch liegende Curven II. Ordnung aus jedem ihrer Punkte durch zwei involutorisch liegende Strahlenbüschel I. Ordnung projicirt, aus jedem ausserhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte aber durch zwei involutorisch liegende Kegelflächen. Eine Regelschaar, welche zu der einen von den beiden Curven perspectivisch ist, liegt zu der anderen involutorisch u. s. w.

Wir können hiernach den einen der vorhin aufgestellten Sätze auf alle Elementargebilde ausdehnen, indem wir sagen:

Zwei gleichartige Elementargebilde, welche projectivisch sind und in einander liegen, haben involutorische Lage, wenn irgend zwei Elemente derselben einander doppelt entsprechen.

Sind nämlich die beiden Elementargebilde zwei in einander liegende Strahlengebilde, so construiren wir zwei in einander liegende Punktreihen II. Ordnung, welche zu denselben perspectivisch sind. Da diese letzteren involutorische Lage haben, weil zwei Punkte derselben einander doppelt entsprechen, so müssen auch die beiden Strahlengebilde involutorisch liegen. Sind aber die Elementargebilde zwei Ebenenbüschel oder zwei gerade Gebilde, so construiren wir zwei zu ihnen perspectivische und in einander liegende Strahlengebilde, und weil dann die letzteren, wie soeben bewiesen, involutorische Lage haben, so gilt dasselbe von den ersteren.

Zwei involutorisch liegende gleichartige Gebilde werden sehr häufig als ein einziges „involutorisches" Gebilde angesehen, dessen

Elemente dann „paarweise einander zugeordnet“ oder auch „involutorisch gepaart“ genannt werden. So z. B. sind die Punkte einer Geraden u, die beliebig in der Ebene einer Curve II. Ordnung angenommen ist, involutorisch gepaart, wenn je zwei conjugirte Punkte derselben einander zugeordnet werden (Seite 117). Ebenso bilden u. A. die sämmtlichen Paare conjugirter Durchmesser einer Curve II. Ordnung einen involutorischen Strahlenbüschel. Wir können ferner sagen:

In einer involutorischen Curve II. Ordnung (Figg. 60 und 61) liegen je zwei einander zugeordnete Punkte mit einem nicht auf der Curve gelegenen Punkte in einer Geraden, und je zwei einander zugeordnete Tangenten schneiden sich auf der Polare jenes Punktes bezüglich der Curve II. Ordnung.

In einer involutorischen Kegelfläche II. Ordnung liegen je zwei einander zugeordnete Strahlen mit einer nicht in der Fläche gelegenen Geraden in einer Ebene, und je zwei einander zugeordnete Berührungsebenen schneiden sich auf der Polarebene jener Geraden bezüglich der Kegelfläche.

Der Satz links ist nur eine Wiederholung des Seite 118 bewiesenen; und der Satz rechts ergiebt sich aus jenem, wenn die Kegelfläche II. Ordnung durch eine beliebige Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird. Haben nämlich zwei Elementargebilde perspectivische Lage, und sind die Elemente des einen involutorisch gepaart, so sind dadurch auch die Elemente des anderen involutorisch gepaart.

„Will man die Elemente eines Elementargebildes involutorisch „paaren, so darf man zwei Paare A, A_1 und B, B_1 zugeord- „neter Elemente willkürlich annehmen; dadurch aber ist jedem „Elemente des Gebildes ein anderes zugeordnet.“

Das involutorische Elementargebilde entsteht nämlich aus zwei in einander liegenden Gebilden, welche projectivisch so auf einander bezogen werden, dass den drei Elementen A, A_1, B des einen die resp. Elemente A_1, A, B_1 des anderen entsprechen; aber diese Beziehung ist nur auf eine einzige Art möglich.

Ist das involutorische Elementargebilde eine Curve II. Ordnung, so kann zu jedem fünften Punkte C der zugeordnete C_1 leicht gefunden werden mit Hülfe des Involutionscentrums U (Figg. 60 u. 61), in welchem $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ sich schneiden, und durch welches auch $\overline{CC_1}$ hindurchgeht, oder auch mit Hülfe der Involutionsaxe. Analoges gilt von der Kegelfläche II. Ordnung.

Sind die Strahlen einer Regelschaar involutorisch zu paaren, so schneiden wir dieselbe in einer Curve II. Ordnung und brauchen dann nur die Punkte der letzteren involutorisch zu paaren. Die Strahlen eines Büschels I. Ordnung S (Fig. 62) werden involutorisch gepaart, wenn man eine zu dem Büschel perspectivische Curve II. Ordnung construirt, z. B. einen durch den Mittelpunkt S gehenden Kreis, und die Punkte dieser Curve einander paarweise zuordnet. Aehnlich können wir mit jedem anderen Elementargebilde verfahren. Die Elemente eines einförmigen Grundgebildes können übrigens auch ohne Hülfe der Gebilde II. Ordnung involutorisch gepaart werden.

Zwei involutorisch liegende, gleichartige Elementargebilde, z. B. zwei involutorische Punktreihen II. Ordnung (Figg. 60 und 61), sind einstimmig oder entgegengesetzt projectivisch, jenachdem zwei einander zugeordnete Elemente A und A_1 durch irgend zwei andere B und B_1 getrennt sind oder nicht. Im ersteren Falle (Fig. 61) bewegen sich zwei einander entsprechende Elemente, von denen das eine das Gebilde AA_1B und das andere gleichzeitig das Gebilde A_1AB_1 beschreibt, in gleichem Sinne, und können nie zusammentreffen; im letzteren Falle (Fig. 60) bewegen sie sich in entgegengesetztem Sinne, und müssen zweimal auf einander fallen. Wir wollen jedes Element, welches zwei involutorisch liegende Gebilde entsprechend gemein haben, ein „Ordnungselement" desjenigen involutorischen Gebildes nennen, welches aus jenen beiden zusammengesetzt ist; es gilt dann der Satz:

„Ein involutorisches Elementargebilde hat keine oder zwei „Ordnungs-Elemente, jenachdem zwei einander zugeordnete „Elemente desselben durch irgend zwei andere getrennt sind „oder nicht. In jedem Ordnungs-Elemente fallen zwei ein„ander zugeordnete Elemente des involutorischen Gebildes zu„sammen."

Liegt das Involutionscentrum U einer involutorischen Curve II. Ordnung ausserhalb der letzteren (Fig. 60), so hat die Curve zwei Ordnungspunkte M, N, nämlich die Berührungspunkte der beiden Tangenten, welche aus U an die Curve gezogen werden können. Die Involutionsaxe u schneidet in diesen Punkten die Curve, weil u die Polare von U ist (Seite 78).

„Die Ordnungselemente M, N eines involutorischen Ele„mentargebildes sind durch je zwei einander zugeordnete Ele„mente A, A_1 harmonisch getrennt."

Es genügt, wenn dieser Satz für eine involutorische Curve II. Ordnung bewiesen wird, da jeder andere Fall auf diesen zurückgeführt werden kann. Sei B, B_1 ein zweites Paar einander zugeordneter Punkte (Fig. 60); dann schneiden sich die Gegenseiten des einfachen Vierecks $AB A_1 B_1$ in zwei conjugirten Punkten (Seite 83), welche durch M und N harmonisch von einander getrennt sind. Die Strahlen $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{BN}$ sind also vier harmonische Strahlen, weil sie vier harmonische Punkte projiciren und folglich sind die Ordnungspunkte M und N in der Curve harmonisch getrennt durch die Punkte A und A_1. Dasselbe folgt aus einem Satze von Seite 86, da $\overline{MN}$ und $\overline{AA_1}$ zwei conjugirte Strahlen sind.

Um die Elemente eines Elementargebildes involutorisch zu paaren, können wir auch zwei Ordnungselemente M, N, oder ein Ordnungselement M und ein Paar zugeordneter Elemente A, A_1 beliebig annehmen; dadurch aber ist zu jedem Elemente das zugeordnete völlig bestimmt. Denn im ersteren Falle sind je zwei Elemente des Gebildes einander zugeordnet, welche durch M und N harmonisch getrennt sind; im letzteren Falle aber kann das zweite Ordnungselement N sofort bestimmt werden, da es von M durch A und A_1 harmonisch getrennt ist, und dieser Fall ist dann auf den vorigen zurückgeführt.

Die bisherigen Sätze über die involutorischen Gebilde sind von solcher Wichtigkeit und werden so häufige Anwendung finden, dass es wohl gerechtfertigt erscheint, wenn wir einige derselben noch einmal auf mehr elementarem Wege beweisen; zumal da sich hierbei noch neue nützliche Sätze ergeben werden. Wir gehen dabei von folgender Erklärung aus:

„Zwei Gebilde $ABCDE\ldots$ und $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, welche nur „aus einzelnen Elementen von zwei Elementargebilden u und u_1 „bestehen, sollen projectivisch genannt werden, wenn die „Gebilde u und u_1 projectivisch so auf einander bezogen werden „können, dass den Elementen A, B, C, D, E, ... von u die „resp. Elementen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ... von u_1 entsprechen. „Wir benutzen das Zeichen $\overset{\frown}{\wedge}$ für projectivisch."

Sind z. B. u und u_1 zwei Punktreihen I. Ordnung, die in einer Ebene, aber nicht in derselben Geraden liegen, so ist nur dann $ABCDE\ldots \overset{\frown}{\wedge} A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, wenn die Geraden $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}$, ... entweder durch einen und denselben Punkt

gehen, oder eine Curve II. Ordnung berühren, von welcher auch u und u_1 zwei Tangenten sind.*)

Ein Gebilde ABCD, *welches aus vier Elementen eines Elementargebildes besteht, ist projectivisch zu jeder aus ihm abgeleiteten Permutation, welche entsteht, wenn zwei von den vier Elementen, sowie auch die beiden übrigen vertauscht werden; oder es ist:*

$$ABCD \nearrow BADC \nearrow CDAB \nearrow DCBA.$$

Sei $ABCD$ ein gerades Gebilde, auf welchen Fall alle übrigen Fälle sich zurückführen lassen, und sei z. B. zu beweisen, dass $ABCD \nearrow CDAB$ ist. Wir projiciren $ABCD$ aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 63) auf eine durch A gehende Gerade, und nennen $AEFG$ diese Projection, bezeichnen ausserdem mit T den Schnittpunkt von $\overline{CF}$ und $\overline{DE}$. Dann ist:

$AEFG$ eine Projection von $ABCD$ aus dem Mittelpunkte S,
$CTFS$ „ „ „ $AEFG$ „ „ „ D,
$CDAB$ „ „ „ $CTFS$ „ „ „ E.

Es ist also:

$$ABCD \nearrow AEFG \nearrow CTFS \nearrow CDAB$$

und folglich $$ABCD \nearrow CDAB.$$

Ebenso lassen sich die übrigen Beziehungen beweisen. Wir folgern daraus;

„Ist $abcd \nearrow ABCD$, so ist auch $abcd \nearrow BADC \nearrow CDAB$ $\nearrow DCBA$.“**)

---

*) Die Beziehung $ABCD \nearrow A_1B_1C_1D_1$ bedeutet auch, wie früher (Seite 54) gezeigt wurde, dass zwischen den Abschnitten der Geraden u und u_1 die Proportion besteht:

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}.$$

**) Mit Hülfe dieses wichtigen Satzes pflegt man u. A. die folgenden sehr bemerkenswerthen Lehrsätze zu beweisen:

Die sechs Eckpunkte von zwei beliebigen Poldreiecken einer Curve k^2 II. Ordnung liegen auf einer zweiten Curve II. Ordnung, welcher unendlich viele Poldreiecke der ersteren eingeschrieben werden können.

Die sechs Seiten von zwei beliebigen Poldreiecken einer Curve II. Ordnung berühren eine zweite Curve II. Ordnung, welcher unendlich viele Poldreiecke der ersteren umschrieben werden können.

Seien nämlich ABC und DEF die beiden Poldreiecke, von deren sechs Eckpunkten keine drei in einer Geraden liegen mögen. Dann sind die Strahlenbüschel $A(BCEF)$ und $D(CBFE)$ projectivisch (Seite 84), weil in Bezug auf k^2 den vier Strahlen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ des ersteren die resp. Strahlen $\overline{DC}$, $\overline{DB}$, $\overline{DF}$, $\overline{DE}$ des letzteren conjugirt sind. Aus $A(BCEF) \nearrow D(CBFE)$

Zugleich aber ergiebt sich der schon früher (Seite 118) auf anderem Wege bewiesene Satz, dass nämlich zwei in einander liegende projectivische Elementargebilde involutorische Lage haben, wenn irgend zwei Elemente derselben, A und A_1, einander doppelt entsprechen. Denn wenn noch dem beliebigen Elemente B des einen Gebildes das Element B_1 des anderen entspricht, so dass den Elementen A, A_1, B des ersteren die resp. Elemente A_1, A, B_1, des letzteren zugewiesen sind, so folgt aus der Relation:

$$A A_1 B B_1 \barwedge A_1 A B_1 B,$$

dass auch dem Element B_1 des ersteren Gebildes das Element B des letzteren entspricht, oder dass je zwei Elemente B und B_1 einander doppelt entsprechen.

Eine Folgerung, die wir schon früher hätten aufstellen können, ist diese:

„Eine Punktreihe I. Ordnung u liegt involutorisch zu einem ihr „projectivischen Strahlenbüschel S, wenn der Mittelpunkt des „letzteren ausserhalb u liegt und von irgend zwei Punkten P „und P_1 der Punktreihe jeder auf demjenigen Strahle des „Büschels liegt, welcher dem anderen Punkte entspricht."

Denn der Schnitt des Büschels mit der Geraden ist projectivisch zu u und hat mit u involutorische Lage, weil die Punkte P und P_1 einander doppelt entsprechen. Auf ähnliche Weise erkennt man, wann ein Ebenenbüschel zu einem geraden Gebilde oder zu einem Strahlenbüschel involutorisch liegt.

Der Satz, dass je zwei einander zugeordnete Elemente A, A_1 eines involutorischen Gebildes durch die Ordnungselemente M, N desselben, wenn solche vorhanden, harmonisch getrennt sind, lässt sich ebenfalls elementar beweisen. Sei das involutorische Gebilde $M . N . A A_1$ ein gerades Gebilde und entstanden aus zwei projectivischen Gebilden, die involutorisch liegen; dann entsprechen den Punkten M, A, N, A_1 des einen Gebildes die Punkte M,

---

folgt aber $A(BCEF) \barwedge D(BCEF)$, und es liegen demnach die sechs Punkte A, B, C, D, E, F auf einer Curve II. Ordnung, wie der Satz links behauptet. Sind nun D' und E' zwei Punkte dieser Curve, welche bezüglich der zuerst angenommenen Curve k^2 einander conjugirt sind und folglich einem Poldreieck $D'E'F''$ von k^2 als Eckpunkte angehören, so liegt auch der Eckpunkt F'' auf der durch A, B, C, D, E, F gehenden Curve II. Ordnung; denn mit dieser Curve hat die durch A, B, C, D', E', F'' gehende fünf und folglich alle Punkte gemein. — Auf ähnliche Art ist der Satz rechts zu beweisen.

A_1, N, A des anderen, weil M und N beiden Gebilden entsprechend gemein sind, A und A_1 aber einander doppelt entsprechen. Es ist also $MANA_1 \barwedge MA_1NA$. Projiciren wir nun $MANA_1$ aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 64) auf eine durch M gehende Gerade, und nennen $MRKT$ die Projection, so ist diese zu $MANA_1$ und folglich auch zu MA_1NA projectivisch, also $MRKT \barwedge MA_1NA$. Diese projectivischen Gebilde haben aber den Punkt M entsprechend gemein und liegen folglich perspectivisch: d. h. die Geraden $\overline{RA_1}$, $\overline{KN}$, $\overline{TA}$ schneiden sich in einem und demselben Punkte Q. Wir erhalten somit ein Viereck $QRST$, von welchem zwei Paar Gegenseiten sich resp. in A und A_1 schneiden, während die Diagonalen beziehungsweise durch M und N gehen, so dass die Punkte $MANA_1$ wirklich vier harmonische Punkte sind.

Eine Gruppe von drei Elementenpaaren $AA_1 . BB_1 . CC_1$ eines involutorischen Elementargebildes wird eine Involution genannt. Die sechs Elemente einer Involution sind nicht unabhängig von einander, weil in einem involutorischen Elementargebilde zu jedem Elemente das zugeordnete bestimmt ist, sobald zwei Paare zugeordneter Elemente gegeben sind. Vielmehr müssen je zwei Gebilde projectivisch sein, welche wie AA_1BC und $A_1AB_1C_1$, oder AB_1C_1C und A_1BCC_1 in symmetrischer Weise aus jenen sechs Elementen zusammengesetzt sind. Umgekehrt folgt aus der Beziehung $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1$, dass die drei Elementenpaare A, A_1; B, B_1; C, C_1 eine Involution $AA_1 . BB_1 . CC_1$ bilden; denn in den projectivischen Gebilden AA_1BC und $A_1AB_1C_1$ entsprechen die Elemente A und A_1 einander doppelt, und folglich auch die Elemente B und B_1, sowie C und C_1. Ein Ordnungselement M oder N kann in der Involution die Stelle eines Elementenpaares vertreten: so z. B. ist $M . AA_1 . BB_1$ eine Involution, wenn $MAA_1B \barwedge MA_1AB_1$. Ebenso ist $M . N . AA_1$ eine Involution, wenn $MANA_1$ projectivisch zu MA_1NA, also ein harmonisches Gebilde ist.

Wir können nun folgenden Doppelsatz aufstellen:

Die sechs Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks $QRST$ (Fig. 65) werden von jeder Geraden u, die mit dem Viereck in einer Ebene liegt, aber durch keinen der vier Eckpunkte geht, in

Die sechs Eckpunkte eines vollständigen ebenen Vierseits werden aus jedem Punkte, der mit dem Vierseit in einer Ebene, aber auf keiner der vier Seiten liegt, durch eine Involution pro-

einer Involution geschnitten, nämlich je zwei Gegenseiten in zwei einander zugeordneten Punkten.

jicirt, nämlich je zwei Gegenpunkte durch zwei einander zugeordnete Strahlen.

Möge u von den Seiten $\overline{RT}$ und $\overline{QS}$, $\overline{ST}$ und $\overline{QR}$, $\overline{QT}$ und $\overline{RS}$ in den resp. Punkten A und A_1, B und B_1, C und C_1 geschnitten werden, und sei O der Schnittpunkt von $\overline{QS}$ und $\overline{RT}$. Dann ist $ATOR$ eine Projection sowohl von ACA_1B_1 aus dem Mittelpunkte Q, als auch von ABA_1C_1 aus dem Mittelpunkte S, und daher

$$ACA_1B_1 \barwedge ATOR \barwedge ABA_1C_1.$$

Ausserdem aber ergiebt sich, wenn A mit A_1, sowie B mit C_1 vertauscht wird (Seite 122):

$$ABA_1C_1 \barwedge A_1C_1AB.$$

Folglich ist auch:

$$ACA_1B_1 \barwedge A_1C_1AB,$$

und $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ ist eine Involution. Denn werden zwei in u liegende gerade Gebilde projectivisch so auf einander bezogen, dass den Punkten A, C, A_1 des ersten die resp. Punkte A_1, C_1, A des zweiten entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch, weil A und A_1 einander doppelt entsprechen, und B_1 und B entsprechen einander wegen der Beziehung $ACA_1B_1 \barwedge A_1C_1AB$.

Sind nun von einer involutorischen Punktreihe u zwei Punktenpaare A, A_1 und B, B_1 gegeben, und soll zu einem beliebigen fünften Punkte C der zugeordnete C_1 gesucht werden, so können wir ohne Benutzung der Gebilde II. Ordnung folgendermaassen verfahren. Wir construiren ein vollständiges Viereck, von welchem zwei Gegenseiten durch resp. A und A_1, zwei andere durch resp. B und B_1 gehen, eine fünfte Seite aber C enthält; dann trifft die sechste Seite den gesuchten Punkt C_1.

Sind zwei Punkte M und N von u sowohl durch A und A_1 als auch durch B und B_1, also durch zwei Paar Gegenseiten des Vierecks harmonisch getrennt, so sind sie auch durch C und C_1, d. h. durch das dritte Paar Gegenseiten harmonisch getrennt. Denn M und N sind dann die Ordnungspunkte des involutorischen Gebildes $AA_1 \,.\, BB_1 \ldots$.

„Wenn einem einfachen Viereck $QRST$ (Fig. 66) eine Curve „II. Ordnung umschrieben ist, so bilden die drei Paare von „Punkten, in welchen irgend eine, durch keinen der vier Eck„punkte gehende Gerade u die Curve und die zwei Paar Gegen-

„seiten des Vierecks schneidet, eine Involution. (Lehrsatz des „Desargues.)“

Denn es werde u von den Seiten $\overline{QT}$, $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ und $\overline{TS}$ in den resp. Punkten A, A_1, B, B_1 geschnitten, von der Curve aber in den Punkten P und P_1. Dann sind die beiden Strahlenbüschel, durch welche die Curvenpunkte P, R, P_1, T aus Q und S projicirt werden, projectivisch (Seite 62), und folglich auch die Punktreihen PBP_1A und $PA_1P_1B_1$, in welchen diese Büschel durch die Gerade u geschnitten werden. Da nun $PA_1P_1B_1 \barwedge P_1B_1PA_1$ (Seite 122), so folgt auch:

$$PBP_1A \barwedge P_1B_1PA_1,$$

d. h. $PP_1 \,.\, AA_1 \,.\, BB_1$ ist eine Involution.

Ein ganz analoger Satz gilt für die Curven II. Ordnung, welche einem einfachen Vierseit eingeschrieben sind, also die Seiten desselben berühren. Weil ein involutorisches einförmiges Gebilde schon durch zwei Elementenpaare A, A_1 und B, B_1 bestimmt ist, so können wir auch folgenden Doppelsatz aufstellen:

Die sämmtlichen Curven II. Ordnung, welche einem ebenen Viereck umschrieben sind, erzeugen mit einer Geraden u, die in der Ebene des Vierecks liegt, aber durch keinen Eckpunkt desselben geht, ein involutorisches gerades Gebilde u. In demselben sind je zwei Punkte einander zugeordnet, welche einer und derselben von den Curven II. Ordnung angehören. In seinen beiden Ordnungspunkten wird u von zwei jener Curven II. Ordnung berührt.

Die sämmtlichen Curven II. Ordnung, welche einem ebenen Vierseit eingeschrieben sind, erzeugen mit einem Punkte S, welcher in der Ebene des Vierseits, aber auf keiner Seite desselben liegt, einen involutorischen Strahlenbüschel S. In demselben sind je zwei Strahlen von S einander zugeordnet, welche eine und dieselbe von den Curven II. Ordnung berühren. Die beiden Ordnungsstrahlen von S berühren in diesem Punkte zwei jener Curven II. Ordnung.

Jenachdem solche Ordnungselemente vorhanden sind oder nicht, giebt es zwei oder gar keine Curven II. Ordnung, welche einem ebenen Viereck umschrieben sind und zugleich eine in derselben Ebene gegebene Gerade u, welche durch keinen der vier Eckpunkte geht, berühren.

einem ebenen Vierseit eingeschrieben sind und zugleich durch einen in derselben Ebene, aber auf keiner der Seiten gelegenen Punkt hindurchgehen.

Zugleich ist die Aufgabe, diese Curven II. Ordnung zu construiren, zurückgeführt auf die folgende: „In einem involutorischen einförmigen Gebilde die Ordnungselemente zu bestimmen.“ Mit dieser Aufgabe zweiten Grades werden wir uns in einem der nächsten Vorträge beschäftigen.

Ist im Satze links die Gerade u unendlich fern, so ergiebt sich als specieller Fall Folgendes:

„Durch vier in einer Ebene liegende eigentliche Punkte können „entweder zwei oder gar keine Parabeln gelegt werden.“

Dreizehnter Vortrag.*)

Metrische Relationen involutorischer Gebilde. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung.

Seien A, A_1; B, B_1; C, C_1 (Figg. 67 und 68) drei Punktenpaare einer involutorischen Punktreihe I. Ordnung, so dass (nach Seite 124) unter Anderem die Beziehung stattfindet: $AA_1BC_1 \nearrow A_1AB_1C$; dann gilt (Seite 54) für die Abschnitte, welche die sechs Punkte unter einander bilden, folgende Proportion:

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1A}{A_1C} : \frac{B_1A}{B_1C}.$$

Wir können statt derselben auch die folgende schreiben:

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CA_1} : \frac{AB_1}{CB_1};$$

denn es ist $A_1A = -AA_1$; $A_1C = -CA_1$ u. s. w., weil je zwei solche Abschnitte gleiche Länge, aber entgegengesetzten Sinn haben. Werden alle Divisoren nebst dem Factor AA_1 fortgeschafft, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\text{I} \ldots\ldots\ AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1.$$

Die Beziehung $AA_1BC_1 \nearrow A_1AB_1C$ verliert ihre Gültigkeit nicht, wenn in derselben irgend zwei einander zugeordnete Punkte vertauscht werden; dasselbe gilt daher von der Gleichung I.

---

*) Als Anhang zu der „reinen“ Geometrie der Lage zu betrachten.

Durch Vertauschung von C mit C_1 z. B. erhalten wir folgende Gleichung:

$$\text{I}_a \ldots\ldots AB_1 \cdot BC \cdot C_1A_1 = AC \cdot BA_1 \cdot C_1B_1;$$

und in derselben Weise ergeben sich aus I noch andere ähnlich gebaute Gleichungen. Ganz analoge Gleichungen lassen sich auch für die Sinus der Winkel aufstellen, welche die sechs Elemente einer Involution im Büschel I. Ordnung mit einander bilden.

Die Gleichungen I und I_a vereinfachen sich wesentlich, wenn einer der sechs Punkte, z. B. C_1, ins Unendliche rückt. Sein zugeordneter Punkt C fällt dann zusammen mit dem sogenannten Mittelpunkte der involutorischen Punktreihe, d. h. mit demjenigen Punkte O, welcher dem unendlich fernen Punkte zugeordnet ist. Zugleich nähern sich die Verhältnisse:

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{AC_1 - AB}{AC_1} = 1 - \frac{AB}{AC_1}$$

$$\text{und} \quad \frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{C_1B_1 - A_1B_1}{C_1B_1} = 1 - \frac{A_1B_1}{C_1B_1}$$

unbegrenzt dem Werthe Eins, weil AC_1 und C_1B_1 ins Unendliche wachsen, AB und A_1B_1 dagegen endliche Abschnitte sind. Die Gleichungen I und I_a gehen also in folgende über:

$$AB_1 \cdot OA_1 = BA_1 \cdot OB_1$$

$$\text{und} \quad AB_1 \cdot BO = AO \cdot BA_1.$$

Durch Division entsteht hieraus:

$$\frac{OA_1}{BO} = \frac{OB_1}{AO},$$

und diese Gleichung lässt sich sofort auf die Form bringen:

$$\text{II} \ldots\ldots OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1;$$

d. h.: „Das Product aus den beiden Abschnitten, welche zwei „einander zugeordnete Punkte (A und A_1 oder B und „B_1 etc.) einer involutorischen Punktreihe I. Ordnung mit „dem Mittelpunkte O desselben bilden, ist constant."

Hat die Punktreihe zwei Ordnungspunkte M und N (Fig. 68), in welchen also je zwei einander zugeordnete Punkte zusammenfallen, so folgt aus II:

$$\text{III} \ldots\ldots OA \cdot OA_1 = (OM)^2 = (ON)^2.$$

Der Mittelpunkt O halbirt also den Abschnitt MN zwischen den Ordnungspunkten. Zugleich sagt diese Gleichung aus (Seite 40), dass M und N durch A und A_1 harmonisch getrennt sind, was wir schon wissen.

Jenachdem das Product $OA \cdot OA_1$ positiv (gleich einem Quadrat $[OM]^2$) oder negativ ist, sind Ordnungspunkte vorhanden

oder nicht. Im ersteren Falle liegen A und A_1 auf der gleichen, im letzteren Falle auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes O. Dasselbe ergiebt sich aus einem früheren Satze (Seite 120).

Beschreiben wir über jedem Abschnitte AA_1, BB_1, CC_1 etc., welcher von zwei einander zugeordneten Punkten der involutorischen Punktreihe begrenzt wird, einen Kreis, dessen Durchmesser der Abschnitt ist, und bezeichnen wir mit r den Radius eines beliebigen dieser Kreise, z. B. desjenigen über AA_1, und mit d den Abstand seines Mittelpunktes K vom Punkte O. Dann ist (Figg. 67 und 68):

$$OA = OK - AK = d - r$$
$$\text{und } OA_1 = OK + KA_1 = d + r,$$

und folglich:

$$OA \,.\, OA_1 = (d - r)\,(d + r) = d^2 - r^2.$$

Hat die involutorische Punktreihe zwei Ordnungspunkte M, N (Fig. 68), so liegt O ausserhalb des Kreises und $d^2 - r^2$ bedeutet das Quadrat der Tangente t, die von O an den Kreis gelegt werden kann; denn t und r sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem d die Hypotenuse ist. Die Länge dieser Tangente ist nach Gleichung II dieselbe für alle über den Abschnitten construirten Kreise, und zwar nach III gleich der halben Länge des Abschnittes MN zwischen den Ordnungspunkten. Wird also aus dem Mittelpunkte O ein Kreis über MN beschrieben, so schneidet dieser die über AA_1, BB_1, CC_1 etc. construirten Kreise unter rechten Winkeln. Es lässt sich sogar zeigen, dass die letzteren Kreise von jedem durch M und N gelegten Kreise rechtwinklig geschnitten werden (vergl. Seite 40).

Hat die involutorische Punktreihe keine Ordnungspunkte (Fig. 67), so liegt ihr Mittelpunkt O innerhalb des über AA_1 beschriebenen Kreises, und $d^2 - r^2$ ist negativ. Wird dann durch O senkrecht zu AA_1 eine Sehne PQ dieses Kreises gezogen, so bildet jede Hälfte OP oder OQ dieser Sehne mit d zusammen die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem r die Hypotenuse ist, so dass $d^2 + (OP)^2 = r^2$ oder $d^2 - r^2 = -(OP)^2 = -(OQ)^2$ ist, Die Länge dieser Sehnenhälften bleibt aber nach Gleichung II dieselbe für alle über den Abschnitten AA_1, BB_1, CC_1 etc. construirten Kreise, und letztere gehen somit alle durch P und Q. Die Winkel APA_1, BPB_1, CPC_1 etc. sind daher Rechte, und wir erhalten den Satz:

„Hat eine involutorische Punktreihe I. Ordnung keine Ordnungs-
„punkte, so giebt es in jeder durch dieselbe gelegten Ebene
„zwei Punkte P und Q, aus welchen sie durch einen recht-
„winkligen involutorischen Strahlenbüschel projicirt wird, so
„dass nämlich je zwei einander zugeordnete Strahlen desselben
„auf einander senkrecht stehen."

Dass die über AA_1, BB_1, CC_1 etc. construirten Kreise durch jeden Punkt hindurchgehen, in welchen irgend zwei von ihnen sich schneiden, kann auch aus folgendem Satze geschlossen werden:

„Ein involutorischer Strahlenbüschel ist rechtwinklig, wenn die
„Winkel zwischen irgend zwei Paaren a, a_1 und b, b_1 zuge-
„ordneter Strahlen Rechte sind."

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt daraus, dass die Strahlen des Büschels nur auf eine einzige Art involutorisch gepaart werden können, so dass die Strahlen a und a_1, sowie b und b_1 einander zugeordnet sind. Dieses geschieht aber, wenn jedem Strahle der zu ihm senkrechte Strahl zugeordnet wird. Hierher gehört auch der Satz:

„Werden einer Curve II. Ordnung beliebig viele rechtwinklige
„Dreiecke so eingeschrieben, dass die Scheitelpunkte der rechten
„Winkel in einem Punkte S zusammenfallen, so schneiden sich
„die Hypotenusen in einem und demselben Punkte."

Durch den rechtwinkligen Büschel S werden nämlich die Curvenpunkte involutorisch gepaart (vergl. Seite 118).

Ist in der Ebene einer Curve II. Ordnung ein Strahlenbüschel U I. Ordnung gegeben, dessen Mittelpunkt nicht auf der Curve liegt, so sind die Strahlen von U involutorisch gepaart, wenn je zwei conjugirte Strahlen einander zugeordnet werden (Seite 119). Wenn der so entstehende involutorische Strahlenbüschel ein rechtwinkliger ist, so hat sein Mittelpunkt eine besondere Bedeutung für die Curve II. Ordnung, und soll ein „Brennpunkt" der letzteren heissen. Wir können also folgende Definition aufstellen:

„Jeder Brennpunkt einer Curve II. Ordnung hat eine solche
„Lage, dass je zwei Strahlen desselben, die auf einander
„senkrecht stehen, in Bezug auf die Curve conjugirt sind."

Ein Brennpunkt kann nicht ausserhalb der Curve II. Ordnung liegen; denn sonst hätte der involutorische Strahlenbüschel,

dessen Mittelpunkt er ist, zwei Ordnungsstrahlen, nämlich zwei Tangenten der Curve. Jeder Brennpunkt F liegt auf einer Axe der Curve II. Ordnung; nämlich ein durch F gelegter Durchmesser ist eine Axe, weil er senkrecht steht auf der durch F gehenden, ihm conjugirten Sehne. Die Verbindungslinie von zwei Brennpunkten F und F_1 einer Curve II. Ordnung ist eine Axe der Curve, weil sie zu den beiden Senkrechten, die in F und F_1 auf ihr errichtet werden können, conjugirt ist, ihr Pol also mit dem unendlich fernen Schnittpunkte dieser Senkrechten zusammenfällt (vergl. Seite 91).

Vom Kreise ist der Mittelpunkt ein Brennpunkt. Zwei Strahlen, die in Bezug auf einen Kreis conjugirt sind, stehen nur dann senkrecht auf einander, wenn einer oder jeder von ihnen ein Durchmesser ist; woraus leicht zu erkennen ist, dass der Kreis ausser dem Mittelpunkte keinen Brennpunkt haben kann. Von der folgenden Untersuchung soll der Kreis ausgeschlossen werden.

Zu einer Geraden p in der Ebene einer Curve II. Ordnung giebt es eine conjugirte Gerade p_1 (Fig. 69), die auf p senkrecht steht, nämlich die Normale, welche von dem Pole von p auf p gefällt werden kann. Sei nun a eine Axe der Curve II. Ordnung, und möge dieselbe von p und p_1 unter schiefen Winkeln in den resp. Punkten P und P_1 geschnitten werden; dann steht jeder Strahl des Büschels P senkrecht auf dem ihm conjugirten Strahle des Büschels P_1. Die Büschel P und P_1 sind nämlich projectivisch auf einander bezogen, wenn jedem Strahle des einen der ihm conjugirte Strahl des anderen zugewiesen ist (Seite 84); da aber, wenn A den unendlich fernen Pol der Axe a bedeutet, die drei Strahlen a, $\overline{PA}$, p von P zu ihren resp. conjugirten Strahlen $\overline{P_1 A}$, a und p_1 von P_1 senkrecht sind, so erzeugen P und P_1 einen Kreis über dem Durchmesser PP_1, und je zwei conjugirte Strahlen dieser Büschel sind auf einander senkrecht. Hieraus folgt die erste Hälfte des Satzes:

„In einer Axe a einer Curve II. Ordnung giebt es zu jedem „Punkte P einen Punkt P_1, so dass je zwei conjugirte Strahlen, „welche durch resp. P und P_1 gehen, zu einander senkrecht „sind. Werden je zwei solche Punkte einander zugeordnet, so „sind die Punkte der Axe a involutorisch gepaart."

Die zweite Hälfte dieses Satzes ergiebt sich aus Folgendem. Wir beziehen die beiden Parallelstrahlenbüschel, von denen der

eine die Richtung des Strahles p und der andere diejenige des Strahles p_1 hat, projectivisch auf einander (Seite 84), indem wir jedem Strahle des einen Büschels den ihm conjugirten Strahl des anderen zuweisen. Die Gerade a wird von diesen Büscheln in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten; und diese liegen involutorisch, weil je zwei Punkte derselben, wie P und P_1, einander doppelt entsprechen.

„Hat diese involutorische Punktreihe a zwei Ordnungspunkte,
„so ist jeder derselben ein Brennpunkt der Curve II. Ordnung;
„hat a keine Ordnungspunkte, so ist jeder der beiden Punkte,
„aus welchen a durch einen rechtwinkligen Strahlenbüschel pro-
„jicirt wird (Seite 130), ein Brennpunkt der Curve."

Denn je zwei zu einander senkrechte Strahlen eines solchen Punktes sind conjugirt. Im letzteren Falle liegen die Brennpunkte in der von a verschiedenen Axe der Curve II. Ordnung, und bilden die Ordnungspunkte einer in dieser zweiten Axe liegenden involutorischen Punktreihe, welche auf dieselbe Weise entsteht wie die erstere.

Keine Curve II. Ordnung hat mehr als zwei Brennpunkte; denn jede Verbindungslinie von zwei Brennpunkten ist eine Axe der Curve, und nur der Kreis hat mehr als zwei Axen. Diejenige Axe a einer Ellipse oder Hyperbel, auf welcher die beiden Brennpunkte dieser Curve liegen, wird die „Hauptaxe", die andere wird die „Nebenaxe" genannt.

„Umschreibt man einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hy-
„potenuse in der Nebenaxe einer Curve II. Ordnung liegt und
„dessen Katheten einander conjugirt sind, einen Kreis, so schneidet
„derselbe die Hauptaxe in den Brennpunkten der Curve."

Dieser Satz folgt sofort aus der zweiten Hälfte des vorhergehenden Satzes.

Die Hyperbel wird von ihrer Hauptaxe geschnitten; denn auf derjenigen Axe, von welcher sie nicht geschnitten wird, können die Brennpunkte nicht enthalten sein, weil dieselben innerhalb der Curve liegen müssen. Die Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel haben vom Mittelpunkt der Curve gleichen Abstand (Seite 37); denn in der involutorischen Punktreihe a, dessen Ordnungspunkte die Brennpunkte sind, ist der Mittelpunkt dem unendlich fernen Punkte zugeordnet, weil die andere Axe der Curve allen zu ihr normalen Geraden conjugirt ist. Ueberhaupt sind die Brennpunkte harmonisch getrennt durch je zwei conjugirte Gerade, welche auf einander senkrecht stehen.

Ist die Curve II. Ordnung eine Parabel, also a die Axe derselben, so haben die beiden projectivischen Parallelstrahlenbüschel, von denen vorhin die Rede war, die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein; denn dieselbe ist, als Tangente der Parabel, sich selbst conjugirt (Seite 83). In der involutorischen Punktreihe a fällt also der eine Ordnungspunkt zusammen mit dem unendlich fernen Punkt, welcher sonach als (uneigentlicher) Brennpunkt der Parabel anzusehen ist. Die Parabel hat demnach nur einen eigentlichen Brennpunkt, welcher als zweiter Ordnungspunkt von a den Abschnitt zwischen je zwei einander zugeordneten Punkten P und P_1 halbirt.

Seien nun F und F_1 die beiden Brennpunkte einer Curve II. Ordnung, von denen der eine unendlich fern in der Richtung der parallelen Durchmesser liegt, wenn die Curve eine Parabel ist. Je zwei conjugirte Gerade $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$, die auf einander senkrecht stehen (Fig. 69), sind dann durch die Punkte F und F_1 und folglich auch durch die Strahlen $\overline{SF}$ und $\overline{SF_1}$ harmonisch getrennt; sie halbiren daher die Winkel zwischen $\overline{SF}$ und $\overline{SF_1}$ (Seite 37). Ist S ein Punkt der Curve, so berührt eine der Geraden $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$ die Curve; liegt S ausserhalb der Curve, so halbiren $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$ auch die Winkel zwischen den beiden Tangenten, welche von S an die Curve gezogen werden können, weil diese gleichfalls durch $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$ harmonisch getrennt sind (Seite 83). Wir erhalten somit die Sätze:

„Jede Tangente einer Curve II. Ordnung bildet gleiche Winkel „mit den beiden Geraden, welche ihren Berührungspunkt mit „Brennpunkten der Curve verbinden. Wenn zwei Kegelschnitte „die nämlichen Brennpunkte haben (confocal sind), so schneiden „sich folglich die beiden Tangenten eines jeden eigentlichen „Punktes, den sie mit einander gemein haben, rechtwinklig."

„Wird der Schnittpunkt von zwei Tangenten verbunden mit „den Brennpunkten einer Curve II. Ordnung, so bildet die eine „Verbindungslinie mit der einen Tangente denselben Winkel wie „die andere Tangente mit der andern Verbindungslinie."

Die Polare f eines Brennpunktes F der Curve II. Ordnung wird „Directrix" oder „Leitlinie" der Curve genannt; es giebt deren zwei bei der Ellipse und der Hyperbel, und eine eigentliche bei der Parabel. Für letztere nun gilt der Satz:

„Zwei Parabeltangenten $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ stehen auf einander senk„recht, wenn ihr Schnittpunkt P auf der Directrix liegt."

In diesem Falle nämlich geht die Polare von P durch den Brennpunkt F (Fig. 70), und enthält die Berührungspunkte A und B der beiden Tangenten, und jede dieser Tangenten bildet deshalb mit $\overline{AB}$ dieselben Winkel wie mit einem beliebigen Durchmesser. Folglich ist in dem Dreieck APB die Summe der Winkel A und B gleich der Summe der Winkel, welche $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ mit dem durch P gehenden Durchmesser PC bilden, also gleich dem Winkel P, und weil die Winkel A, B und P zusammen zwei Rechte ausmachen, so muss P ein rechter Winkel sein.

Andere bemerkenswerthe Eigenschaften der Brennpunkte einer Curve II. Ordnung ergeben sich daraus, dass je zwei conjugirte Strahlen eines Brennpunktes auf einander senkrecht stehen; u. A. gilt der Satz:

„Der Abschnitt einer jeden Tangente, welcher zwischen dem „Berührungspunkte und einer Directrix liegt, wird aus dem zu„gehörigen Brennpunkte durch einen rechten Winkel projicirt."

Die Schenkel dieses Winkels sind nämlich zwei conjugirte Strahlen des Brennpunktes F, weil der Punkt, in welchem die Tangente von der Directrix f geschnitten wird, die Verbindungslinie von F mit dem Berührungspunkte zur Polare hat.

Seien $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ zwei beliebige Tangenten einer Curve II. Ordnung (Fig. 71), sei also $\overline{AB}$ die Polare des Punktes T; dann ist der Schnittpunkt P von $\overline{AB}$ und f der Pol der Geraden $\overline{TF}$, und $\overline{PF}$ steht senkrecht zu $\overline{TF}$, weil diese beiden Strahlen conjugirt sind. Zugleich sind $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ harmonisch getrennt durch $\overline{FT}$ und $\overline{FP}$, weil A und B harmonisch getrennt sind durch P und $\overline{FT}$. Folglich werden die von $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ gebildeten Nebenwinkel halbirt durch $\overline{FT}$ und $\overline{FP}$ (Seite 37); oder:

„Wird ein eigentlicher Brennpunkt einer Curve II. Ordnung ver„bunden mit den Berührungspunkten, sowie mit dem Schnitt„punkte von zwei Tangenten, so bildet die letztere Verbindungs„linie gleiche Winkel mit den beiden ersteren."

Werden durch A und B (Fig. 71) zwei Parallele zu $\overline{FT}$ gezogen, welche in resp. A_1 und B_1 die Directrix f schneiden, so sind auch A_1 und B_1 harmonisch getrennt durch P und $\overline{FT}$. Die Winkel zwischen $\overline{FA_1}$ und $\overline{FB_1}$ werden daher ebenfalls halbirt durch $\overline{FT}$ und $\overline{FP}$. Hieraus folgt sogleich, dass die Dreiecke A_1AF und B_1BF gleiche Winkel haben und ähnlich sind, dass also die Proportion gilt:

$$FA : AA_1 = FB : BB_1.$$

Die Abschnitte AA_1 und BB_1 bilden gleiche Winkel mit der Directrix f, und sind deshalb proportional zu den Senkrechten AA_2 und BB_2, welche aus A und B auf f gefällt werden können, so dass wir auch haben:

$$FA : AA_2 = FB : BB_2.$$

Hier sind A und B zwei ganz beliebige Curvenpunkte; also gilt der Satz:

„Die Abstände eines beliebigen Punktes der Curve II. Ordnung „von einem Brennpunkte und von der zugehörigen Directrix „haben ein constantes Verhältniss zu einander."

Für die Parabel ist der Werth dieses Verhältnisses gleich der Einheit, oder die beiden Abstände sind einander gleich; denn der Scheitelpunkt ist eben so weit entfernt vom Brennpunkte wie von der Directrix, weil er durch diese beiden harmonisch getrennt ist vom unendlich fernen Parabelpunkt. Mit Benutzung der Scheitelpunkte beweisen Sie leicht, dass der Werth jenes Verhältnisses kleiner ist als eins bei der Ellipse, und grösser als eins bei der Hyperbel; und da eine Curve II. Ordnung durch jede ihrer Axen in zwei symmetrische Hälften zerfällt, so hat das Verhältniss denselben Werth für den einen wie für den anderen Brennpunkt und die zugehörige Directrix. Sind also r und r_1 die Abstände irgend eines Curvenpunktes A von den beiden Brennpunkten F und F_1 (Fig. 72 und 73), d und d_1 seine Abstände von den zugehörigen beiden Leitlinien f und f_1, so ist

$$\frac{r}{d} = \frac{r_1}{d_1} = \text{Const.},$$

wo auch der Punkt A liegen möge. Es folgt hieraus, dass auch $\frac{r \pm r_1}{d \pm d_1}$ diesem constanten Verhältniss gleich ist. Bei der Ellipse ist aber $d + d_1$ und bei der Hyperbel $d - d_1$ constant, nämlich gleich dem Abstande der beiden Leitlinien von einander; also muss für die Ellipse die Summe $r + r_1$, und für die Hyperbel die Differenz $r - r_1$ constant sein, d. h.:

„Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes einer El- „lipse von den Brennpunkten derselben ist constant."

„Die Differenz der Abstände eines beliebigen Punktes einer „Hyperbel von den Brennpunkten derselben ist constant."

Ohne Mühe werden Sie finden, dass diese constante Summe oder Differenz gleich ist dem Abschnitte $2a$ zwischen den Scheitel-

punkten der Hauptaxe, und dass die Ellipse von ihrer Hauptaxe ein grösseres Stück einschliesst, als von der Nebenaxe.

Wenn zwei Punkte zu einer Geraden symmetrisch liegen, d. h. wenn ihre Verbindungslinie auf der Geraden senkrecht steht und von ihr halbirt wird, so heisst der eine der „Gegenpunkt" des anderen bezüglich der Geraden. Für die Ellipse und die Hyperbel nun gilt der Satz:

„Die Gegenpunkte eines Brennpunktes F_1 bezüglich aller Tan-
„genten einer Ellipse oder Hyperbel liegen auf einem Kreise
„vom Radius $2a$, welcher den anderen Brennpunkt F zum Mittel-
„punkt hat."

Ist nämlich G der Gegenpunkt von F_1 bezüglich einer beliebigen Tangente, deren Berührungspunkt A sei (Fig. 74), so liegen F, A und G in einer Geraden, weil $\overline{AF_1}$ und folglich auch $\overline{AG}$ mit der Tangente dieselben Winkel bildet wie $\overline{AF}$ (Seite 133). Und da ausserdem die Punkte F_1 und G von A gleiche Abstände haben, so ist FG gleich der Summe resp. Differenz von FA und F_1A, also constant $= 2a$, wie oben behauptet wurde. — Der Fusspunkt N des von F_1 auf die Tangente gefällten Perpendikels ist der Halbirungspunkt von F_1G, und der Mittelpunkt M der Curve halbirt die Strecke F_1F; folglich ist MN parallel zu FG und gleich $\frac{1}{2}FG$, also $MN = a$; d. h.:

„Die Fusspunkte aller Perpendikel, welche von den Brennpunkten
„einer Ellipse oder Hyperbel auf deren Tangenten gefällt werden
„können, liegen auf einem Kreise, welcher den Abschnitt zwi-
„schen den Scheitelpunkten der Hauptaxe zum Durchmesser hat."

Betrachtet man die Parabel als Grenzfall der Ellipse oder Hyperbel, z. B. als eine Ellipse, von welcher ein Brennpunkt unendlich fern liegt, so gelangt man zu folgendem Satze:

„Die Fusspunkte aller Perpendikel, welche vom Brennpunkte F
„einer Parabel auf deren Tangenten gefällt werden können, liegen
„auf der Scheiteltangente der Parabel."

Um ihn zu beweisen, legen wir durch den Schnittpunkt N der Scheiteltangente $\overline{NS}$ und einer beliebigen Tangente $\overline{NA}$ (Fig. 75) eine Parallele $\overline{NF_1}$ zur Axe und eine Gerade $\overline{NF}$ nach dem Brennpunkte; dann sind die Winkel FNA und SNF_1 einander gleich (Seite 133), weil $\overline{NF_1}$ den zweiten, unendlich fernen Brennpunkt der Parabel enthält; und da SNF_1 ein rechter Winkel ist, so muss auch FNA ein solcher sein.

Diese Sätze geben uns zugleich Mittel an die Hand, die Brennpunkte einer Curve II. Ordnung auf einfache Weise zu construiren. Eine sehr einfache Construction für die Ellipse oder Hyperbel ist noch die folgende. Man construire in den beiden Scheitelpunkten der Hauptaxe die Tangenten; dieselben schneiden jede dritte Tangente in zwei Punkten P, Q, welche aus jedem Punkte der Hauptaxe durch zwei conjugirte Strahlen projicirt werden (Seite 85). Um also die Brennpunkte zu erhalten, für welche diese beiden conjugirten Strahlen auf einander senkrecht stehen müssen, beschreibe man über PQ als Durchmesser einen Kreis; die Schnittpunkte desselben mit der Hauptaxe sind die gesuchten beiden Brennpunkte.

Werden zwei Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ einer Curve II. Ordnung von einer dritten in den resp. Punkten A_1 und B_1 geschnitten, und sind A, B und C die resp. drei Berührungspunkte, und F ein eigentlicher Brennpunkt der Curve (Fig. 76); dann gelten für die Winkel, durch welche die Abschnitte der Tangenten aus F projicirt werden, folgende Gleichungen (Seite 134):

$$\angle B_1FC = \angle BFB_1 = \tfrac{1}{2}\angle BFC,$$
$$\angle CFA_1 = \angle A_1FA = \tfrac{1}{2}\angle CFA;$$

folglich: $\angle B_1FC + \angle CFA_1 = \tfrac{1}{2}(\angle BFC + \angle CFA)$,

oder: $\angle B_1FA_1 = \angle BFT = \angle TFA.$

Bleiben also die ersten beiden Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ fest, so hat der Winkel B_1FA_1, durch welchen der von ihnen begrenzte Abschnitt A_1B_1 der dritten Tangente aus dem Brennpunkte F projicirt wird, eine unveränderliche Grösse, wie auch die dritte Tangente angenommen werden mag. Rollt die dritte Tangente auf der Curve fort, so beschreiben A_1 und B_1 zwei projectivische Punktreihen in den festen Tangenten, die Strahlen $\overline{FA_1}$ und $\overline{FB_1}$ aber zwei gleiche Strahlenbüschel um F; also:

„Die projectivischen Punktreihen, in welchen irgend zwei Tan„genten einer Curve II. Ordnung die übrigen schneiden, werden „aus jedem Brennpunkt der Curve durch zwei gleiche und ein„stimmig projectivische Strahlenbüschel projicirt."

Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Curve II. Ordnung eine Parabel oder ein Kreis, und zugleich der Brennpunkt der unendlich ferne Punkt der ersteren, oder der Mittelpunkt des letzteren ist. Sind von einer Curve II. Ordnung drei Tangenten und ein Brennpunkt gegeben, so können hiernach leicht beliebig viele andere Tangenten construirt werden.

Ist die Curve II. Ordnung eine Parabel, so kann die bewegliche Tangente $\overline{A_1B_1}$ auch in das Unendliche rücken, und die Geraden $\overline{FA_1}$ und $\overline{FB_1}$ bilden folglich dieselben Winkel mit einander wie die festen Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$. Das Viereck B_1TA_1F ist demnach ein Kreisviereck, und:

„Jeder Kreis, welcher einem Tangentendreieck B_1TA_1 einer „Parabel umschrieben ist, geht durch den Brennpunkt F der „Parabel."

Wenn man also den vier Dreiecken, welche von den Seiten eines Vierseits gebildet werden, Kreise umschreibt, so haben diese einen Punkt mit einander gemein, nämlich den Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel.

Ist die Curve II. Ordnung eine Hyperbel, und sind die beiden festen Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ ihre Asymptoten, also A und B ihre unendlich fernen Punkte, so laufen $\overline{TB}$ und $\overline{FB}$ parallel und der Winkel $B_1FA_1 = BFT$ ist gleich dem einen der beiden Winkel, welche die Asymptote $\overline{TB}$ mit der Hauptaxe $\overline{FT}$ bildet; dem anderen ist der Winkel $A_1F_1B_1$ gleich, durch welchen A_1B_1 aus dem zweiten Brennpunkte F_1 projicirt wird. Folglich sind B_1FA_1 und $A_1F_1B_1$ zwei Nebenwinkeln gleich, und $B_1FA_1F_1$ ist ein Kreisviereck. Also:

„Die beiden Brennpunkte einer Hyperbel liegen mit den Punkten, „in welchen eine beliebige Tangente die beiden Asymptoten „schneidet, auf einem Kreise. Die Mittelpunkte dieses Kreises „und der Hyperbel liegen mit denselben beiden Schnittpunkten „auf einem zweiten Kreise."

Vierzehnter Vortrag.

Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Elemente.

Unsere Untersuchungen haben uns mehrfach zu Aufgaben geführt, welche im Allgemeinen zwei Lösungen zulassen, und nicht mit alleiniger Anwendung linearer Constructionen gelöst werden können, sondern die Benutzung eines Gebildes zweiter Ordnung

verlangen. Hierher gehört u. A. die Aufgabe: „diejenigen Punkte zu bestimmen, welche zwei projectivische Punktreihen, die in derselben Geraden liegen, entsprechend gemein haben", sowie die folgende: „von einem involutorischen Elementargebilde die Ordnungselemente zu bestimmen". Alle solche Aufgaben lassen sich auf die folgende zurückführen:

„Zwei Punktreihen II. Ordnung k und k_1, die in derselben Curve „liegen, sind projectivisch auf einander bezogen; diejenigen „Punkte sollen bestimmt werden, welche sie entsprechend ge„mein haben."

Seien A, B, C (Fig. 77) drei beliebige Punkte von k, und A_1, B_1, C_1 die ihnen entsprechenden Punkte von k_1. Projiciren wir dann aus A die Punktreihe k_1 und ebenso aus A_1 die Punktreihe k, so erhalten wir zwei projectivische Strahlenbüschel $A(A_1B_1C_1)$ und $A_1(ABC)$, welche perspectivisch liegen, weil sie den Strahl $\overline{AA_1}$ entsprechend gemein haben. Die Schnittpunkte von je zwei einander entsprechenden Strahlen der Büschel liegen also auf einer Geraden u, nämlich auf derjenigen, welche den Schnittpunkt von $\overline{AB_1}$ und $\overline{A_1B}$ verbindet mit dem Schnittpunkte von $\overline{AC_1}$ und $\overline{A_1C}$. Und die Punkte, welche u mit der Curve II. Ordnung gemein hat, sind die gesuchten; die Punktreihen k und k_1 haben jeden dieser Punkte entsprechend gemein. Jenachdem also u die Curve schneidet, berührt oder gar nicht trifft, erhalten wir zwei solche Punkte, oder einen, oder gar keinen Punkt.

Zufolge des Pascal'schen Lehrsatzes liegt auf der Geraden u auch der Schnittpunkt der Geraden $\overline{BC_1}$ und B_1C; denn auf der Geraden u schneiden sich die drei Paar Gegenseiten des Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$, welches der Curve II. Ordnung eingeschrieben ist. Zu derselben Geraden u gelangen wir also auch, wenn wir die projectivischen Punktreihen k_1 und k aus den resp. Punkten B und B_1 oder aus C und C_1 durch zwei Strahlenbüschel projiciren, welche wieder perspectivisch liegen. Sind überhaupt P, Q irgend zwei Punkte von k und P_1, Q_1 die ihnen entsprechenden Punkte von k_1, so liegt der Schnittpunkt von PQ_1 und P_1Q auf der Geraden u. Wenn also drei Punkte von k nebst den ihnen entsprechenden Punkten von k_1 gegeben sind, so kann die Gerade u ohne Schwierigkeit construirt werden.

Liegen die Punktreihen k und k_1 involutorisch, bilden sie also eine involutorische Punktreihe II. Ordnung, so ist u die Involu-

tionsaxe derselben, und die Curve wird von ihr in den beiden Ordnungspunkten geschnitten, wenn solche vorhanden sind. In diesem Falle brauchen wir nur zwei Paare zugeordneter Punkte A, A_1 und B, B_1 zu kennen, um u zu construiren; denn den Punkten A, B, A_1 von k entsprechen sodann die resp. Punkte A_1, B_1, A von k_1, und u geht durch die beiden Punkte, in welchen die Geraden $\overline{AB_1}$ und $\overline{A_1B}$ von den resp. Geraden $\overline{A_1B}$ und $\overline{A_1B_1}$ geschnitten werden (Fig. 60 und 61). Der Pol von u, in welchem sich die Geraden $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ schneiden, ist das Involutionscentrum, und wenn aus demselben zwei Tangenten an die Curve gezogen werden können, so berühren diese die Curve in den Ordnungspunkten.

Auf die soeben gelöste Aufgabe lassen sich nun die einzelnen Fälle der folgenden allgemeineren Aufgabe leicht zurückführen:

„Zwei Elementargebilde, die in einander liegen, sind projectivisch auf einander bezogen; ihre entsprechend gemeinschaftlichen Elemente sollen bestimmt werden.“

Sind z. B. die Elementargebilde zwei Kegelflächen oder zwei Regelschaaren, so schneiden wir sie durch eine beliebige Ebene in zwei projectivischen Punktreihen, die in derselben Curve II. Ordnung liegen; sind sie zwei Strahlenbüschel II. Ordnung, so liegen auch die Punktreihen II. Ordnung, welche von denselben eingehüllt werden, in einander, und sind projectivisch auf einander bezogen: wir brauchen also nur die Punkte zu bestimmen, welche diese Curven entsprechend gemein haben, um sofort die gesuchten beiden Strahlen zu erhalten, indem dieselben durch jene Punkte hindurchgehen. Liegen zwei projectivische Strahlenbüschel I. Ordnung concentrisch und in einer Ebene, so schneiden wir sie durch eine Curve II. Ordnung, welche durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt geht, in zwei projectivischen Punktgebilden k und k_1; die beiden Strahlen, welche die Büschel entsprechend gemein haben, gehen dann durch die beiden Punkte, welche k und k_1 entsprechend gemein haben. Sind die beiden projectivischen Elementargebilde zwei Punktreihen v und v_1 (Fig. 78), die in derselben Geraden liegen, so wird dieser Fall auf den eben erledigten zurückgeführt, indem wir die Punktreihen aus einem beliebigen Punkte S durch zwei concentrische Strahlenbüschel projiciren. Wir legen also durch S eine Curve II. Ordnung, z. B. einen Kreis, in der Ebene $\overline{Sv}$, und projiciren irgend drei Punkte A, B, C von v und die ihnen entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 von v_1 aus dem

Punkte S auf diese Curve. Wir erhalten so die resp. Curvenpunkte A', B', C' und A'_1, B'_1, C'_1, und bestimmen sofort die Gerade u, auf welcher die Schnittpunkte von $\overline{A'B'_1}$ und $\overline{A'_1B'}$, von $\overline{B'C'_1}$ und $\overline{B'_1C'}$, sowie von $\overline{C'A'_1}$ und $\overline{C'_1A'}$ liegen. Wird dann die Curve II. Ordnung von u in zwei Punkten M' und N' geschnitten, so projiciren wir diese aus dem Punkte S auf die Gerade v, und erhalten so die beiden Punkte M und N von v, welche mit ihren entsprechenden Punkten M_1 und N_1 von v_1 zusammenfallen. Hat die Curve II. Ordnung nur einen oder keinen Punkt mit u gemein, so erhalten wir nur einen oder keinen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt der Punktreihen v und v_1.

Für die Büschel II. Ordnung und die Kegelflächen lässt sich die allgemeine Aufgabe auch direct, ohne Benutzung der Curven II. Ordnung lösen; für die einförmigen Grundgebilde können wir sie daher lösen mit Hülfe eines beliebigen Elementar-Gebildes II. Ordnung. Die bequemste Lösung ist jedoch die soeben gegebene, weil sich Curven II. Ordnung mittelst des Cirkels leicht construiren lassen.

Bekanntlich sind zahlreiche Fortschritte der Mathematik innig verknüpft mit dem Bestreben, durch Erweiterung vorhandener oder Einführung neuer Begriffe Ausnahmen von allgemeinen Sätzen und Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze unter einem Gesichtspunkte zu vereinigen. So wurde die Arithmetik durch die negativen, durch die irrationalen und endlich durch die imaginären Zahlen wesentlich bereichert, und ohne die letzteren würde der wichtige Satz, dass eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln hat, mit allen seinen zahlreichen Anwendungen in der analytischen Geometrie geradezu falsch sein. Ebenso erwies sich die Einführung der unendlich fernen Elemente in die neuere Geometrie als höchst fruchtbar.

Die Aufgaben zweiten Grades nun haben den ersten Anlass gegeben, auch in die synthetische Geometrie „imaginäre“ Punkte, Gerade und Ebenen einzuführen; und zwar ist es eines der grossen Verdienste von Staudt's, die Theorie der imaginären Elemente rein geometrisch begründet und zu einem hohen Grade der Vollkommenheit gebracht zu haben. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass diese Theorie in der synthetischen wie in der analytischen Geometrie auf die Anschaulichkeit verzichten muss, und deshalb beschränke ich mich hier darauf, nur die Anfangsgründe derselben Ihnen vorzutragen.

Wir definiren die imaginären Elemente durch folgenden Satz, welcher zugleich die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zusammenfasst:

„Zwei projectivische Elementargebilde, die in einander liegen, „aber nicht identisch sind, haben zwei reelle oder conjugirt „imaginäre Elemente (die aber auch zusammenfallen können) „entsprechend gemein."

Wir nennen also die beiden entsprechend gemeinschaftlichen Elemente „imaginär", so oft sie nicht reell vorhanden sind; in allen meinen früheren Vorträgen war nur von „reellen" Elementen die Rede. Ein involutorisches Elementargebilde hat hiernach allemal zwei (reelle oder imaginäre) Ordnungselemente. Auch können wir sagen:

Eine Curve II. Ordnung hat mit jeder reellen Geraden ihrer Ebene zwei Punkte gemein;	Von einer Curve II. Ordnung gehen durch jeden reellen Punkt ihrer Ebene zwei Tangenten;

und nur dann, wenn die verschiedenen, in diesem Doppelsatze zusammengefassten Fälle getrennt werden sollen, fügen wir hinzu:

diese beiden Punkte sind imaginär oder reell oder sie fallen zusammen, jenachdem die Gerade ganz ausserhalb der Curve liegt oder dieselbe schneidet oder berührt.	diese beiden Tangenten sind imaginär oder reell oder sie fallen zusammen, jenachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb oder auf der Curve liegt.

Wenn die Curve II. Ordnung und die Gerade vollständig gegeben sind, so wollen wir ihre beiden gemeinschaftlichen Punkte als bestimmt ansehen. Sind aber z. B. nur fünf Punkte A, B, C, D, E der Curve gegeben, so denken wir uns diese durch zwei projectivische Strahlenbüschel $A(CDE)$ und $B(CDE)$ erzeugt; dieselben werden von der Geraden in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten, welche jene beiden Punkte entsprechend gemein haben. Die beiden Punkte können nach den obigen Regeln bestimmt werden, wenn irgend eine Curve II. Ordnung vollständig gegeben ist. Wir können auf diese Weise auch entscheiden, von welcher Art eine durch fünf Punkte bestimmte Curve II. Ordnung ist; denn:

„Eine Curve II. Ordnung ist eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, „jenachdem die beiden Punkte, welche sie mit der unendlich „fernen Geraden gemein hat, reell oder imaginär sind oder „zusammenfallen."

Auch die folgenden Aufgaben zweiten Grades können mittelst derselben Methode gelöst werden:

Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben

vier Punkte und die Tangente von einem derselben, oder drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben; die beiden Punkte sollen bestimmt werden, welche sie mit einer beliebigen reellen Geraden ihrer Ebene gemein hat.

vier Tangenten und der Berührungspunkt von einer derselben, oder drei Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben; die beiden Tangenten sollen bestimmt werden, welche durch einen beliebigen reellen Punkt ihrer Ebene gehen.

Sollen die gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer Curve II. Ordnung, von welcher fünf Tangenten gegeben sind, bestimmt werden, so suchen wir zunächst die Berührungspunkte der Tangenten, und führen so diese Aufgabe auf die vorhergehenden zurück.

Die beiden conjugirt imaginären Ordnungselemente eines einstimmig involutorischen Elementargebildes $AA_1 . BB_1 \ldots .$ werden von v. Staudt dadurch unterschieden, dass er mit dem Gebilde einen bestimmten in ihm enthaltenen Sinn ABA_1 oder A_1BA verbindet. Auch ohne hierauf näher einzugehen, können wir auf Grund des Vorhergehenden folgende Sätze und Definitionen aufstellen:

Ein imaginärer Punkt liegt allemal auf einer reellen Geraden; dieselbe enthält auch den conjugirt imaginären Punkt.

Eine imaginäre Ebene geht allemal durch eine reelle Gerade; durch dieselbe geht auch die conjugirt imaginäre Ebene.

Eine imaginäre Gerade „erster Art" geht allemal durch einen reellen Punkt und liegt in einer reellen Ebene mit ihrer conjugirt imaginären Geraden; nämlich der Punkt und die Ebene sind die Träger der projectivischen Strahlenbüschel I. Ordnung, welche die beiden conjugirt imaginären Geraden entsprechend gemein haben.

Zwei projectivische Regelschaaren II. Ordnung, die in einander liegen, haben entweder zwei reelle Gerade, die auch zusammenfallen können, oder zwei conjugirt imaginäre Gerade „zweiter Art" entsprechend gemein. Von den imaginären Geraden erster Art unterscheiden sich diese Geraden zweiter Art dadurch, dass sie von keiner reellen Ebene in einem reellen Punkte geschnitten und aus keinem reellen Punkte durch eine reelle Ebene projicirt werden können. Eine reelle Ebene nämlich schneidet die beiden projectivischen Regel-

schaaren in zwei projectivischen Punktreihen I. oder II. Ordnung, die in einander liegen und nur dann einen reellen Punkt entsprechend gemein haben, wenn die Regelschaaren eine durch ihn gehende reelle Gerade entsprechend gemein haben. Es giebt also eine Art von imaginären Punkten oder Ebenen, dagegen zwei Arten von imaginären Geraden.

Wenn wir von Punkten, Geraden und Ebenen schlechthin reden, so verstehen wir darunter wie früher reelle Elemente, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird oder aus dem Zusammenhange sich ergiebt. Dieses gilt insbesondere auch von den folgenden Aufgaben zweiten Grades.

„In einer Ebene sind zwei einfache $n$ecke gegeben; es soll ein „drittes construirt werden, welches dem einen der gegebenen „eingeschrieben, dem andern umschrieben ist.“ Oder, um bestimmter zu reden: „Ein $n$eck zu construiren, dessen Eckpunkte „der Reihe nach in n gegebenen Geraden $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ „liegen, und dessen Seiten der Reihe nach durch n gegebene „Punkte $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ der Ebene gehen.“

Wir projiciren aus dem Punkte S_1 die Punktreihe u_1 auf die Gerade u_2, dann aus S_2 die Punktreihe u_2, d. h. die Projection von u_1, auf die Gerade u_3, ferner aus dem Punkte S_3 die Punktreihe u_3 auf u_4 u. s. w., und endlich aus S_n die Punktreihe u_n auf u_1. Wir erhalten so $n+1$ projectivische Punktreihen I. Ordnung, von denen jede eine Projection der vorhergehenden ist, und von denen die erste und die letzte in einer und derselben Geraden u_1 liegen. Jeder Punkt nun, welchen die erste und die letzte dieser Punktreihen entsprechend gemein haben, kann als erster Eckpunkt des gesuchten $n$ecks angenommen werden, und giebt sofort eine Lösung der Aufgabe. Im Allgemeinen sind also höchstens zwei $n$ecke möglich, die der Aufgabe genügen. Wenn in besonderen Fällen die beiden in u_1 liegenden projectivischen Punktreihen mehr als zwei und folglich alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so erhalten wir unendlich viele Lösungen der Aufgabe. — Die Bedingung, dass die Geraden $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ mit den Punkten $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ in einer und derselben Ebene liegen sollen, ist übrigens nicht nothwendig; es genügt, wenn S_1 mit u_1 und u_2 in einer Ebene liegt, ebenso S_2 mit u_2 und u_3 u. s. w., sowie endlich S_n mit u_n und u_1. Die gegebenen beiden $n$ecke können also auch sogenannte windschiefe $n$ecke sein.

Hierher gehört auch die Aufgabe:

„Eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade a, b, c, d „schneidet, wenn von diesen letzteren keine zwei in einer Ebene „liegen."

Wir beziehen die Ebenenbüschel a und b perspectivisch auf die Punktreihe c, und scheiden dieselben durch d in zwei zu einander projectivischen Punktreihen. Durch jeden Punkt, welchen die letzteren entsprechend gemein haben, geht eine Gerade, welche auch von a, b und c geschnitten wird, weil sie in zwei homologen Ebenen der Büschel a und b liegt. Gehören die Geraden a, b, c, d einer und derselben Regelschaar an, so hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen; im allgemeinen Fall dagegen zwei. Wir können die Aufgabe auch so aussprechen:

„Eine Regelfläche II. Ordnung ist durch drei Gerade a, b, c „ihrer einen Regelschaar gegeben; es sollen die Punkte bestimmt „werden, welche sie mit einer beliebigen vierten Geraden d ge„mein hat."

Eine der wichtigeren Aufgaben zweiten Grades ist die folgende:

„Zwei involutorische Elementargebilde liegen in einander; es „sollen zwei Elemente bestimmt werden, welche sowohl in dem „einen als in dem anderen Gebilde einander zugeordnet sind."

Sind zunächst die beiden Elementargebilde zwei in derselben Curve II. Ordnung liegende involutorische Punktreihen, sind etwa (Fig. 79) einerseits den Punkten α und β der Curve die resp. Punkte α_1 und β_1 zugeordnet, andererseits aber den Punkten A und B die resp. Punkte A_1 und B_1, so suchen wir die beiden Involutionscentra U und V, so dass mit U je zwei einander zugeordnete Punkte der einen, und mit V je zwei solche der anderen Punktreihe in einer Geraden liegen. Wird dann die Gerade $\overline{UV}$ von der Curve II. Ordnung in zwei Punkten X und X_1 geschnitten, so sind diese in jeder der involutorischen Punktreihen einander zugeordnet. Berührt $\overline{UV}$ die Curve, so ist der Berührungspunkt von jeder der beiden Punktreihen ein Ordnungspunkt. Liegt endlich $\overline{UV}$ ganz ausserhalb der Curve, so giebt es keinen reellen Punkt, welcher in beiden involutorischen Punktreihen sich selbst oder einem anderen Punkte zugeordnet ist. Dieser letzte Fall kann aber nur dann eintreten, wenn jede der beiden involutorischen Punktreihen zwei reelle Ordnungspunkte hat, also entgegengesetzt involutorisch ist, weil nur dann die Punkte U

und V ausserhalb der Curve liegen; und da die Polaren von U und V einander innerhalb der Curve schneiden müssen, nämlich im Pol von UV, so sind ausserdem die Ordnungspunkte der einen Punktreihe durch diejenigen der anderen getrennt.

Sind die involutorischen Elementargebilde zwei concentrische Strahlenbüschel, die in derselben Ebene liegen, so schneiden wir sie durch eine Curve II. Ordnung, welche durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Büschel gelegt wird; und auf ähnliche Weise können wir jeden beliebigen Fall unserer allgemeinen Aufgabe auf den eben erledigten zurückführen. Das zuletzt gewonnene Resultat gilt deshalb nicht blos für zwei involutorische Punktreihen, die in derselben Curve II. Ordnung liegen, sondern kann allgemein so ausgesprochen werden:

„Wenn zwei involutorische Elementargebilde in einander liegen, „so giebt es in denselben zwei Elemente, welche sowohl in dem „einen als auch in dem anderen Elementargebilde einander zu„geordnet sind; diese Elemente sind nur dann (conjugirt) imaginär, „wenn beide Gebilde entgegengesetzt involutorisch sind, und die „Ordnungselemente des einen durch diejenigen des anderen ge„trennt sind. Wenn die beiden einander doppelt zugeordneten „Elemente sich vereinigen, so haben die involutorischen Gebilde „ein Ordnungselement entsprechend gemein."

Sind z. B. die Gebilde zwei Strahlenbüschel I. Ordnung und ist der eine derselben ein rechtwinkliger (Seite 130), so folgt als specieller Fall dieses Satzes:

„In jedem involutorischen Strahlenbüschel I. Ordnung giebt es „zwei einander zugeordnete reelle Strahlen, die auf einander „senkrecht stehen; dieselben heissen die Axen des Büschels."

Wir haben so aufs Neue den Satz bewiesen, dass die Ellipse und die Hyperbel zwei zu einander senkrechte conjugirte Durchmesser, d. h. zwei Axen besitzen (vgl. Seite 91); denn die sämmtlichen Durchmesser bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, wenn je zwei conjugirte Durchmesser einander zugeordnet werden. Natürlich gehört dieses Ergebniss in die Geometrie des Maasses, und ebenso die hieran sich knüpfende Aufgabe zweiten Grades:

„Von einer Curve II. Ordnung sind zwei Paare conjugirter Durch„messer gegeben; die Axen der Curve sollen construirt werden."

Durch den Mittelpunkt S der Curve (Fig. 80), in welcher die gegebenen Durchmesser sich schneiden, legen wir einen beliebigen Kreis, welcher das eine Paar conjugirter Durchmesser in den

Punkten A und A_1, das andere Paar in den Punkten B und B_1 schneiden möge. Dann werden die Punkte des Kreises mittelst des Durchmesserbüschels involutorisch gepaart, und der Punkt U, in welchem $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ sich schneiden, ist das Involutionscentrum, mit welchem je zwei einander zugeordnete Punkte des Kreises in einer Geraden liegen. Verbinden wir also U mit dem Mittelpunkt C des Kreises durch eine Gerade, so schneidet diese den Kreis in zwei einander zugeordneten Punkten X und X_1, welche aus S durch die gesuchten beiden Axen $\overline{SX}$ und $\overline{SX_1}$ projicirt werden. — Liegt U ausserhalb des Kreises, so besitzt derselbe zwei reelle Ordnungspunkte M und N, welche aus U durch zwei Tangenten des Kreises projicirt werden, aus S aber durch die Asymptoten der Hyperbel, welcher alsdann der gegebene Durchmesserbüschel angehört (Seite 92). — Wie können (nach Seite 130) die Axen construirt werden, wenn statt des Kreises eine beliebige durch S gehende Curve II. Ordnung gegeben ist?

Im Folgenden werden wir mehrfach die Aufgabe zu lösen haben:

„In einem involutorischen Strahlenbüschel sind zwei Strahlen „so zu bestimmen, dass sie durch zwei in der Ebene ge- „gebene Punkte harmonisch getrennt sind."

Damit diese Aufgabe nicht unmöglich werde, setzen wir voraus, dass die gegebenen Punkte M und N nicht mit dem Mittelpunkte S des Strahlenbüschels in einer Geraden liegen, und dass durch keinen derselben ein Ordnungsstrahl des Büschels gehe. Projiciren wir dann die involutorische Punktreihe, von welcher M und N die Ordnungspunkte sind, aus dem Punkte S durch einen zweiten involutorischen Strahlenbüschel, so haben wir nur diejenigen beiden Strahlen zu suchen, welche in jedem der beiden Büschel einander zugeordnet sind. — Auch diese Aufgabe lässt sich auf andere Elementargebilde übertragen, und in verschiedene Formen kleiden. Statt des Büschels S könnte z. B. in der Geraden $\overline{MN}$ eine involutorische Punktreihe gegeben sein; liegt dann von den Punkten M und N der eine N unendlich fern, so lautet die Aufgabe:

„In einer involutorischen Punktreihe I. Ordnung sind zwei ein- „ander zugeordnete Punkte zu bestimmen, welche von einem be- „liebig in der Geraden gegebenen Punkte M gleichen Abstand haben."

In einer Ebene ist ein Dreieck ABC und ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung F

In einer Ebene ist ein Dreieck und eine involutorische Punktreihe I. Ordnung gegeben, von

gegeben, von welchem kein Ordnungsstrahl durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung so umschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Strahlen des Büschels F hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

welcher kein Ordnungspunkt in einer Seite des Dreiecks liegt. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung so eingeschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Punkte der Punktreihe hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

Damit die Aufgabe möglich sei, darf der Mittelpunkt des Büschels F mit keinem Eckpunkte des Dreiecks ABC (Fig. 81) zusammenfallen; wir dürfen daher annehmen, dass mindestens zwei Seiten des letzteren, etwa $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ nicht durch F hindurchgehen. Auf jeder dieser Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ muss es einen Punkt geben, dessen Polare in Bezug auf die gesuchte Curve, falls letztere existirt, durch F geht; und da derselbe von seiner Polare durch die Curve harmonisch getrennt ist, anderseits aber je zwei einander zugeordnete Strahlen von F hinsichtlich der gesuchten Curve II. Ordnung conjugirt sind, so finden wir ihn wie folgt. Wir bestimmen im Büschel F zwei einander zugeordnete Strahlen p und p_1 so, dass sie durch die Punkte A und B, zwei andere q und q_1 so, dass sie durch die Punkte A und C harmonisch getrennt sind (Fig. 81). Sind diese Strahlen imaginär, so giebt es keine reelle Curve II. Ordnung, welche die Bedingungen erfüllt; doch tritt dieser Fall nur dann ein, wenn der Büschel F zwei reelle Ordnungsstrahlen hat, die durch A und B oder auch durch A und C von einander getrennt sind (Seite 146). Möge $\overline{AB}$ von den Strahlen p und p_1 in den resp. Punkten P und P_1 geschnitten werden, und $\overline{AC}$ von q und q_1 in den resp. Punkten Q und Q_1. Dann können und müssen wir eine der folgenden Annahmen machen:

1) P und Q seien die Pole von resp. p_1 und q_1;
2) P und Q_1 seien die Pole von resp. p_1 und q;
3) P_1 und Q seien die Pole von resp. p und q_1;
4) P_1 und Q_1 seien die Pole von resp. p und q.

Jede dieser vier Annahmen führt zu einer Lösung der gegebenen Aufgabe. Wenn z. B. die erste Annahme gemacht wird, so suchen wir auf der Geraden $\overline{PC}$ den Punkt C', welcher durch P und dessen Polare p_1 harmonisch von C getrennt ist, und ebenso auf $\overline{QB}$ den Punkt B', welcher von B harmonisch getrennt ist durch

Q und dessen Polare q_1. Diejenige Curve II. Ordnung, welche durch die fünf Punkte $ABCB'C'$ hindurchgeht, und von welcher nach den früher angegebenen Methoden noch beliebig viele Punkte bestimmt werden können, befriedigt dann alle Bedingungen. Denn sie ist dem Dreieck ABC umschrieben; und da durch P und p_1 zwei Paar Curvenpunkte A, B und C, C' harmonisch getrennt sind, so ist P der Pol von p_1, also der Strahl $\overline{FP}$ oder p dem Strahle p_1 conjugirt, ebenso aber auch q dem Strahle q_1, so dass je zwei einander zugeordnete Strahlen des Büschels F hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

Hat der involutorische Büschel F zwei reelle Ordnungsstrahlen, welche also von der gesuchten Curve II. Ordnung berührt werden, so können wir die eben gelöste Aufgabe auch so aussprechen:

Um ein gegebenes Dreieck eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche zwei in derselben Ebene gegebene Gerade berührt.

Einem gegebenen Dreieck eine Curve II. Ordnung einzuschreiben, welche durch zwei in derselben Ebene gegebene Punkte hindurchgeht.

Zugleich aber ergiebt die obige Construction, dass diese Doppelaufgabe nur dann vier reelle Auflösungen hat, wenn links die beiden Geraden durch keine zwei Eckpunkte und rechts die beiden Punkte durch keine zwei Seiten des gegebenen Dreiecks von einander getrennt sind. Im entgegengesetzten Falle giebt es gar keine reelle Lösung.

Hat der Büschel F imaginäre Ordnungsstrahlen, so hat die Aufgabe vier Lösungen. Dieser Fall tritt u. A. dann ein, wenn der Büschel ein rechtwinkliger, also F ein Brennpunkt der gesuchten Curve ist (wie in Fig. 81 angenommen wurde), so dass wir beiläufig die Aufgabe gelöst haben:

„Die vier Curven II. Ordnung zu bestimmen, welche einem „gegebenen Dreieck umschrieben sind, und einen gegebenen „Punkt zum Brennpunkt haben."

Möge zum Schluss eine Aufgabe hier Platz finden, welche zwar nicht vom zweiten Grade, aber doch den zuletzt erörterten nahe verwandt ist, nämlich:

In einer Ebene seien ein Dreieck ABC und eine involutorische Punktreihe I. Ordnung u gegeben, so jedoch, dass kein Ordnungspunkt von u auf einer

In einer Ebene seien ein Dreieck und ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung S gegeben, so jedoch, dass kein Ordnungsstrahl von S durch

Seite des Dreiecks liegt, und u durch keinen Eckpunkt des Dreiecks geht. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung umschrieben werden, so dass je zwei einander zugeordnete Punkte von u hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

einen Eckpunkt des Dreiecks geht, und der Mittelpunkt von S auf keiner Seite des Dreiecks liegt. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung so eingeschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Strahlen von S hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

Seien den Punkten K und M (Fig. 82), in denen u von resp. $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ geschnitten wird, die resp. Punkte K_1 und M_1 der involutorischen Punktreihe u zugeordnet; sei ferner K_2 derjenige Punkt von $\overline{AB}$, welcher durch die Curvenpunkte A und B harmonisch getrennt ist von K, und M_2 derjenige Punkt von $\overline{BC}$, welcher durch B und C harmonisch getrennt ist von M. Bezüglich der gesuchten Curve ist dann $\overline{K_1K_2}$ die Polare des Punktes K, weil sowohl K_1 als auch K_2 dem Punkte K conjugirt ist; und ebenso ist $\overline{M_1M_2}$ die Polare von M. Ist also C' der Punkt, welcher durch K und $\overline{K_1K_2}$ harmonisch getrennt ist von C, und ebenso A' der Punkt, welcher durch M und $\overline{M_1M_2}$ harmonisch getrennt ist von A, so geht die gesuchte Curve durch die fünf Punkte A, B, C, A', C'. Wirklich sind, wie verlangt wurde, die Punkte K und K_1 (und ebenso M und M_1) einander hinsichtlich dieser Curve conjugirt, weil K von der Geraden $\overline{K_1K_2}$ sowohl durch die Curvenpunkte A und B, als auch durch C und C' harmonisch getrennt und folglich der Pol von $\overline{K_1K_2}$ ist.

Wir können die soeben gelösten Aufgaben auch wie folgt aussprechen (vergl. Seite 142):

Durch fünf Punkte der Ebene, von welchen drei reell und die übrigen beiden entweder reell oder conjugirt imaginär sind, und von denen keine drei in einer Geraden liegen, eine Curve II. Ordnung zu legen.

Einem ebenen Fünfeck, von dessen Seiten drei reell und die übrigen beiden entweder reell oder conjugirt imaginär sind, eine Curve II. Ordnung einzuschreiben.

Jede dieser beiden Aufgaben hat eine reelle Lösung.

Fünfzehnter Vortrag.

Hauptaxen und Symmetrie-Ebenen, Focalaxen und cyclische Ebenen einer Kegelfläche zweiter Ordnung.

Die Polarentheorie der Kegelfläche II. Ordnung folgt ohne Weiteres, wie schon früher (Seite 86) hervorgehoben wurde, aus derjenigen der Curve II. Ordnung. Anders verhält es sich aber mit den Sätzen der Geometrie des Maasses, welche aus der Polarentheorie abgeleitet werden können; dieselben lassen sich keinesweges von den Curven II. Ordnung durch die Methoden des Projicirens und Schneidens auf die Kegelflächen II. Ordnung übertragen, sind auch zum Theil für diese von anderer Art als für jene, und müssen für die Kegelflächen besonders entwickelt werden. Doch werden uns hierbei die früheren Untersuchungen häufig als Vorbild dienen.

Wird im Strahlenbündel eine Kegelfläche II. Ordnung angenommen, so sind in Bezug auf dieselbe einer beliebigen Ebene ε des Bündels alle Ebenen conjugirt, welche durch den Polstrahl e von ε gehen. Verbinden wir e mit dem zu ε normalen Strahle des Bündels, so erhalten wir eine Ebene ε', welche zu ε conjugirt und zugleich normal ist. Im Allgemeinen giebt es zu einer beliebigen Ebene ε des Bündels nur eine solche „conjugirte Normalebene“ ε'; nur wenn eine Ebene α zu ihrem Polstrahle a rechtwinklig ist, sind alle ihre conjugirten Ebenen α' zu ihr normal. In diesem Falle halbiren α und a die Winkel, welche von irgend zwei mit a in einer Ebene liegenden Strahlen der Kegelfläche gebildet werden; denn a und α sind auf einander normal und trennen die beiden Strahlen harmonisch (Seite 86 und 37). Die Strahlen der Kegelfläche II. Ordnung liegen also paarweise symmetrisch zu der Ebene α, und wir können diese eine „Symmetrie-Ebene der Kegelfläche“ nennen; ihr Polstrahl a wird gewöhnlich eine „Hauptaxe“ der Kegelfläche genannt. Jede Symmetrie-Ebene der Kegelfläche steht also auf ihrer zugeordneten Hauptaxe, d. h. auf ihrem Polstrahle senkrecht.

Wenn eine Ebene ε sich um einen Strahl s des Büschels dreht, so beschreibt ihr Polstrahl e in der Polarebene von s, und der zu

ihr normale Strahl in der zu s normalen Ebene des Bündels einen Strahlenbüschel. Die beiden so beschriebenen Strahlenbüschel sind aber zu dem Ebenenbüschel s und folglich auch zu einander projectivisch und erzeugen im Allgemeinen einen Ebenenbüschel II. Ordnung. Also:

„Wenn von zwei conjugirten Normalebenen des Bündels die „eine ε sich um eine Axe s dreht, so beschreibt die andere ε' „im Allgemeinen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher die „Polarebene von s bezüglich der gegebenen Kegelfläche und die „zu s normale Ebene des Bündels enthält."

Nur dann dreht auch ε' sich um eine Axe s', wenn die beiden projectivischen Strahlenbüschel perspectivische Lage, also einen Strahl a entsprechend gemein haben. In diesem Falle liegt s in einer Symmetrie-Ebene α, von welcher a der Polstrahl (die zugeordnete Hauptaxe) ist; und weil α die conjugirte Normalebene von der Ebene $\overline{sa}$ ist, so muss auch s' in α liegen. Also:

„In einer Symmetrie-Ebene α der Kegelfläche II. Ordnung ist „jedem Strahle s des Bündels ein Strahl s' zugeordnet, so dass „je zwei zu einander normale Ebenen der Büschel s und s' be„züglich der Kegelfläche conjugirt sind."

Dieser Satz ist demjenigen analog, mit dessen Hülfe wir früher (Seite 131) zu den Brennpunkten einer Curve II. Ordnung gelangt sind. Es wird uns zu den sogenannten Focalaxen der Kegelfläche II. Ordnung führen; doch müssen wir vorher die Frage erledigen, ob und wie viele Symmetrie-Ebenen bei einer Kegelfläche II. Ordnung existiren. Wir wollen zunächst beweisen, dass die Kegelfläche mindestens eine Symmetrie-Ebene besitzt.

Sei Σ der Ebenenbüschel, welchen die conjugirten Normalebenen aller durch einen beliebigen Strahl s des Bündels gehenden Ebenen bilden. Ist derselbe von der I. Ordnung, so ist das Vorhandensein einer Symmetrie-Ebene schon bewiesen (s. o.); wir nehmen deshalb an, Σ sei von der II. Ordnung. Zu diesem Ebenenbüschel gehört jede Symmetrie-Ebene der gegebenen Kegelfläche als conjugirte Normalebene der durch s und die zugeordnete Hauptaxe gehenden Ebene. Alle Ebenen η_i nun, welche die von Σ eingehüllte Kegelfläche in zwei Strahlen schneiden, sind von den übrigen Ebenen φ des Strahlenbündels getrennt durch die Berührungsebenen dieser Kegelfläche (vergl. Seite 79). Ist also t die Gerade, in welcher die conjugirten Normalebenen einer Ebene η_i und einer Ebene φ sich schneiden, so bilden die conjugirten Normal-

ebenen aller durch t gehenden Ebenen einen Ebenenbüschel T I. oder II. Ordnung, welcher mit Σ mindestens zwei und höchstens vier reelle Ebenen gemein hat. Eine dieser gemeinschaftlichen Ebenen ist die conjugirte Normalebene von $\overline{st}$; jede andere aber ist zu zwei verschiedenen ihr conjugirten Ebenen, nämlich zu je einer der Büschel s und t, normal und folglich auch zu ihrem Polstrahle, in welchem diese beiden Ebenen sich schneiden. Und da jede zu ihrem Polstrahle normale Ebene eine Symmetrie-Ebene der gegebenen Kegelfläche II. Ordnung ist, so giebt es deren mindestens eine und im Allgemeinen höchstens drei.

Jede Kegelfläche II. Ordnung besitzt also mindestens eine Symmetrie-Ebene α nebst der ihr zugeordneten Hauptaxe a; wir können aber leicht zeigen, dass sich in der Hauptaxe a allemal noch zwei Symmetrie-Ebenen rechtwinklig schneiden. Wenn man nämlich in der Symmetrie-Ebene α je zwei Strahlen des Bündels einander zuordnet, welche bezüglich der Kegelfläche II. Ordnung conjugirt sind, so erhält man einen involutorischen Strahlenbüschel, dessen Axen b und c zwei Hauptaxen der Kegelfläche sind; denn z. B. der Strahl b ist conjugirt und zugleich normal zu c und zu a, seine Polarebene $\overline{ca}$ ist folglich zu b normal, und somit eine Symmetrie-Ebene der Kegelfläche. Ist insbesondere der involutorische Strahlenbüschel α ein rechtwinkliger, so ist demnach jeder Strahl desselben eine Hauptaxe und jede durch a gehende Ebene eine Symmetrie-Ebene. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem besonderen Falle die Kegelfläche II. Ordnung eine Rotationsfläche (also eine gerade Kreiskegelfläche) ist, welche a zur Rotationsaxe hat. Wir haben so bewiesen:

„Eine Kegelfläche II. Ordnung hat im Allgemeinen drei Symme-
„trie-Ebenen, welche sich in den drei Hauptaxen a, b, c recht-
„winklig schneiden, also ein rechtwinkliges Poldreikant der
„Kegelfläche bilden. Nur die Rotations-Kegelfläche hat nicht
„drei, sondern unendlich viele Symmetrie-Ebenen, welche bis
„auf eine einzige durch die Rotationsaxe gehen."

Wir wollen nun zu dem Satze zurückkehren, welcher uns vorhin an die Lehre von den Brennpunkten der Curven II. Ordnung erinnerte. Zunächst setzen wir fest:

„Die Axe f jedes Ebenenbüschels I. Ordnung, von welchem
„je zwei zu einander normale Ebenen hinsichtlich einer Kegel-
„fläche II. Ordnung conjugirt sind, soll eine Focalaxe der
„Kegelfläche heissen."

Wenn also eine Ebene sich um eine Focalaxe f dreht, so beschreibt ihre conjugirte Normalebene gleichfalls den Büschel f, und die Axe f muss folglich (Seite 152) in einer Symmetrie-Ebene der Kegelfläche liegen. Eine Hauptaxe ist, wie leicht einzusehen, nur dann zugleich Focalaxe der Kegelfläche, wenn diese eine Rotationsfläche und die Hauptaxe ihre Rotationsaxe ist. Die Rotations-Kegelflächen, welche wir fortan ausschliessen, haben übrigens nur eine Focalaxe, nämlich eben die Rotationsaxe. — Die Verbindungsebene von zwei reellen Focalaxen f und f' ist eine Symmetrie-Ebene der Kegelfläche, weil sie den beiden durch f und f' gehenden und zu ihr normalen Ebenen conjugirt ist. Durch keine Focalaxe kann an die Kegelfläche eine reelle Berührungsebene gelegt werden (vergl. Seite 130).

Eine Symmetrie-Ebene α der Kegelfläche II. Ordnung wird nun von zwei beliebigen conjugirten Normalebenen in zwei solchen Strahlen s und s' geschnitten, dass jede durch s gehende Ebene zu einer durch s' gehenden conjugirt und normal ist (Seite 152). Die beiden Büschel s und s' conjugirter Normalebenen sind aber projectivisch, und werden von einer zweiten Symmetrie-Ebene β in zwei projectivischen Strahlenbüscheln geschnitten. Letztere haben involutorische Lage, weil je zwei homologe Strahlen derselben in der nämlichen Beziehung wie s und s' zu einander stehen, und die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels β sind Focalaxen der Kegelfläche. Sind diese Ordnungsstrahlen imaginär, so giebt es (vergl. Seite 130) zwei Axen, aus welchen der involutorische Büschel β durch zwei rechtwinklige Ebenenbüschel projicirt wird und welche zwei reelle Focalaxen der Kegelfläche sind. Mehr als zwei reelle Focalaxen kann die Kegelfläche nicht haben, weil die Verbindungsebene von zwei reellen Focalaxen allemal eine Symmetrie-Ebene ist, und diese nicht mehr als zwei Focalaxen enthalten kann, und weil nur bei der Rotationskegelfläche eine Focalaxe zugleich Hauptaxe ist.

Durch die beiden reellen Focalaxen f und f' der Kegelfläche II. Ordnung sind je zwei conjugirte Normalebenen harmonisch getrennt; denn diese schneiden die Symmetrie-Ebene $\overline{ff'}$ in zwei zugeordneten Strahlen des involutorischen Büschels, von welchem f und f' die Ordnungsstrahlen sind. Insbesondere sind durch f und f' auch die übrigen beiden Symmetrie-Ebenen harmonisch getrennt, und die von f und f' gebildeten Winkel werden folglich von zwei Hauptaxen halbirt. Wir können hiernach die drei Haupt-

axen der Kegelfläche wie folgt unterscheiden: die erste steht auf der Ebene $\overline{ff'}$ senkrecht und liegt ausserhalb der Kegelfläche, die zweite liegt innerhalb und die dritte ausserhalb der Kegelfläche in der Ebene $\overline{ff'}$. Von den drei Symmetrie-Ebenen enthält die erste die beiden reellen Focalaxen f und f', die zweite liegt ganz ausserhalb der Kegelfläche und die dritte schneidet ebenso wie die erste die Kegelfläche in zwei reellen „Scheitel-Strahlen"; die zweite und dritte Symmetrie-Ebene enthalten je zwei conjugirt-imaginäre Focalaxen der Kegelfläche.

Die Halbirungsebenen der Flächenwinkel, welche von zwei Berührungsebenen der Kegelfläche gebildet werden, sind conjugirte Normalebenen und somit harmonisch getrennt durch die beiden reellen Focalaxen f und f'; sie halbiren also auch die Winkel der beiden Ebenen, welche die Schnittlinie t der beiden Berührungsebenen mit f und f' verbinden. Ebenso beweist man den Satz (vergl. Seite 133):

„Jede Berührungsebene einer Kegelfläche II. Ordnung bildet „gleiche Winkel mit den beiden Ebenen, welche ihren Berührungs- „strahl mit den reellen Focalaxen der Fläche verbinden."

Ist nun g der Gegenstrahl von f bezüglich der einen von zwei Berührungsebenen, die sich in einem Strahle t schneiden, und g' derjenige von f' bezüglich der anderen, so bilden also die Ebenen $\overline{tg}$ und $\overline{tf'}$ dieselben Winkel mit einander wie $\overline{tf}$ und $\overline{tg'}$; und weil ausserdem $< tg = < tf$ und $< tf' = < tg'$ ist, so sind die beiden Dreikante gtf' und ftg' congruent und können durch Drehung um ihre gemeinschaftliche Kante t zur Deckung gebracht werden. Die Kantenwinkel gf' und fg' sind daher gleich; nur der eine derselben ändert seine Lage, nicht aber seine Grösse, wenn die eine der beiden Berührungsebenen an der Kegelfläche fortrollt. Daraus folgt:

„Die Gegenstrahlen einer Focalaxe f bezüglich aller Berührungs- „ebenen der Kegelfläche II. Ordnung liegen auf einer Rotations- „Kegelfläche, welche die zweite Focalaxe f' zur Rotations- „axe hat."

Nach dem vorletzten Satze muss jeder dieser Gegenstrahlen mit der anderen Focalaxe und dem Berührungsstrahle der zugehörigen Berührungsebene in einer Ebene liegen; und da der Berührungsstrahl mit der ersten Focalaxe dieselben Winkel bildet, wie mit ihrem Gegenstrahle, so ergiebt sich noch:

„Die Summe resp. Differenz der beiden Winkel, welche ein be-
„liebiger Strahl der Kegelfläche mit den beiden reellen Focal-
„axen f und f' bildet, ist constant."

Jenachdem Sie den einen oder den anderen der beiden Nebenwinkel benutzen, welche der Strahl mit der einen Focalaxe bildet, erhalten Sie eine constante Summe oder eine constante Differenz. Aus dem Satze folgt, dass die Kegelfläche von ihrer ersten Symmetrie-Ebene $\overline{ff'}$ einen grösseren Winkel einschliesst als von der dritten.

Von einer zu der Focalaxe f normalen Ebene wird die Kegelfläche in einer Curve II. Ordnung geschnitten, von welcher ein Brennpunkt auf f liegt; denn je zwei bezüglich der Curve conjugirte Strahlen dieses Punktes sind auf einander normal, weil sie in zwei conjugirten Normalebenen von f liegen. Wir können deshalb zwei früher bewiesene Sätze (Seite 134 und 137) ohne Weiteres in folgender Form auf die Kegelfläche übertragen:

„Wird eine Focalaxe f einer Kegelfläche II. Ordnung ver-
„bunden mit den Berührungsstrahlen und mit der Schnittlinie
„von zwei Berührungsebenen, so bildet die letztere Verbindungs-
„ebene gleiche Winkel mit den beiden ersteren."

„Die projectivischen Strahlenbüschel, in welchen zwei Berüh-
„rungsebenen einer Kegelfläche II. Ordnung die übrigen schneiden,
„werden aus jeder Focalaxe f der Fläche durch zwei gleiche
„und einstimmig projectivische Ebenenbüschel projicirt."

Wir wenden uns nunmehr zu den „cyclischen Ebenen" der Kegelflächen II. Ordnung, welche in gewisser Hinsicht den Focalaxen reciprok sind und folgendermassen definirt werden können:

„Die Ebene jedes Strahlenbüschels I. Ordnung, von welchem
„je zwei zu einander normale Strahlen hinsichtlich einer Kegel-
„fläche II. Ordnung conjugirt sind, soll eine cyclische Ebene
„der Kegelfläche heissen."

Man nennt diese Ebene deshalb eine „cyclische", weil jede zu ihr parallele Schnittcurve der Kegelfläche ein Kreis ist; nämlich der Mittelpunkt einer solchen Curve II. Ordnung liegt auf dem Polstrahle der Ebene, und je zwei conjugirte Durchmesser der Curve sind zu einander normal, weil sie zu zwei conjugirten Strahlen des in der Definition genannten Strahlenbüschels parallel laufen. Eine Symmetrie-Ebene ist demnach nur dann zugleich cyclische Ebene der Kegelfläche, wenn diese eine Rotationsfläche, und wenn ihre

Rotationsaxe die zu der Symmetrie-Ebene normale Hauptaxe ist. Die Rotationskegelflächen, welche wir wiederum ausschliessen wollen, haben übrigens nur diese eine cyclische Ebene.

Eine cyclische Ebene kann mit der Kegelfläche keinen reellen Strahl gemein haben, weil sonst ein reeller Strahl der Ebene sich selbst conjugirt wäre. Zwei reelle cyclische Ebenen scheiden sich in einer Hauptaxe, nämlich in einer Geraden, zu welcher in jeder der Ebenen ein Strahl conjugirt und normal ist. Bezeichnen wir überhaupt zwei Strahlen des Bündels, welchem die Kegelfläche angehört, als „conjugirte Normalstrahlen", wenn sie zu einander normal und hinsichtlich der Kegelfläche conjugirt sind, so ist leicht einzusehen, dass zu jedem Strahle l des Bündels (die drei Hauptaxen ausgenommen) nur ein conjugirter Normalstrahl l' existirt; in l' nämlich schneiden sich die Polarebene und die Normalebene des Strahles l.

Wenn nun der Strahl l im Bündel einen beliebigen Strahlenbüschel ε beschreibt, so beschreiben seine Polar- und seine Normalebene zwei zu ε projectivische Ebenenbüschel, und es ergiebt sich:

„Wenn ein Strahl l im Bündel sich in einer Ebene ε bewegt, „so beschreibt sein conjugirter Normalstrahl l' im Allgemeinen „eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch den Polstrahl und „die Normale der Ebene ε, ausserdem aber durch die drei „Hauptaxen der gegebenen Kegelfläche geht. Nur dann be„schreibt auch l' einen Strahlenbüschel I. Ordnung ε', wenn ε „durch eine der drei Hauptaxen geht, und in diesem Falle „enthält auch ε' diese Hauptaxe."

Nämlich in diesem Specialfalle liegen die beiden zu ε projectivischen Ebenenbüschel perspectivisch. Die Beziehung zwischen den conjugirten Normalstrahlen des Bündels ist eine involutorische zweiten Grades, welche ebenso wie diejenige zwischen den conjugirten Normalebenen zur Bestimmung der Hauptaxen der Kegelfläche II. Ordnung benutzt werden kann. Sie führt zu allen cyclischen Ebenen der Kegelfläche, d. h. zu allen denjenigen Ebenen ε, welche mit den zugehörigen Ebenen ε' zusammenfallen.

Die Ebenen einer Hauptaxe a sind paarweise einander zugeordnet, so dass je zwei conjugirte Normalstrahlen l und l' allemal in zwei zugeordneten Ebenen ε und ε' von a liegen, und zwar sind die beiden Büschel ε und ε' conjugirter Normalstrahlen, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, zu einander projectivisch. Aus einer zweiten Hauptaxe b werden diese Büschel durch zwei

projectivische Ebenenbüschel projicirt, welche involutorische Lage haben; denn je zwei homologe Ebenen derselben stehen in derselben Wechselbeziehung zu einander, wie die Ebenen ε und ε'. Die beiden Ordnungsebenen dieses involutorischen Büschels b aber sind cyclische Ebenen der gegebenen Kegelfläche II. Ordnung, wie ohne Weiteres einleuchtet.

Durch jede der drei Hauptaxen gehen also zwei cyclische Ebenen der Kegelfläche; dieselben sind jedoch conjugirt-imaginär für zwei der Hauptaxen, und nur in der dritten Hauptaxe schneiden sich zwei reelle cyclische Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$. Denn gäbe es mehr als zwei, etwa drei, reelle cyclische Ebenen, so müssten sich dieselben in den drei Hauptaxen schneiden, also mit den Symmetrie-Ebenen zusammenfallen, was nach früheren Bemerkungen unmöglich ist. Also:

„Es giebt zwei Büschel paralleler Ebenen, welche eine beliebige „Kegelfläche II. Ordnung in Kreisen schneiden; diese Büschel „gehen durch die reellen cyclischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ der Kegel-„fläche."

Durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ sind zwei Hauptaxen und überhaupt je zwei conjugirte Normalstrahlen harmonisch getrennt; denn dieselben liegen in zwei zugeordneten Ebenen des involutorischen Büschels, von welchem $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Ordnungselemente sind. Von den drei Symmetrie-Ebenen der Kegelfläche halbiren folglich zwei, die von den cyclischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ gebildeten Flächenwinkel, die dritte steht auf $\varkappa$ und $\varkappa'$ normal. — Da die Halbirungslinien der Winkel, welche von irgend zwei Strahlen der Kegelfläche gebildet werden, zwei conjugirte Normalstrahlen, also durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ harmonisch getrennt sind, so ergiebt sich der Satz:

„Bringt man die Verbindungsebene von zwei beliebigen Strahlen „der Kegelfläche mit den cyclischen Ebenen zum Durchschnitt, „so bildet die eine Schnittlinie mit dem einen Strahle denselben „Winkel, wie der andere Strahl mit der anderen Schnittlinie."

Ebenso leicht beweist man:

„Der ebene Winkel, welchen die cyclischen Ebenen auf irgend „einer Berührungsebene der Kegelfläche begrenzen, wird von „dem Berührungsstrahle halbirt."

Zwei conjugirte Normalstrahlen sind harmonisch getrennt durch die Berührungsebenen von je zwei Strahlen der Kegelfläche, welche mit einem von ihnen in einer Ebene liegen; hieraus können Sie ohne Schwierigkeit die Folgerung ziehen:

„Bringt man eine cyclische Ebene zum Durchschnitt mit zwei „Berührungsebenen der Kegelfläche und mit der Verbindungs- „ebene der beiden Berührungsstrahlen, so bildet die letztere „Schnittlinie gleiche Winkel mit den beiden ersteren."

Nehmen Sie noch eine dritte, bewegliche Berührungsebene zu Hülfe, so können Sie (nach Analogie von Seite 137) weiter schliessen:

„Die Ebenen, durch welche ein beweglicher Strahl der Kegel- „fläche II. Ordnung aus zwei festen Strahlen derselben projicirt „wird, begrenzen auf jeder der beiden reellen cyclischen Ebenen „Winkel von constanter Grösse. Zwei projectivische Ebenen- „büschel, welche die Kegelfläche erzeugen, werden folglich von „jeder cyclischen Ebene in zwei projectivisch gleichen Strahlen- „büscheln geschnitten."

Die meisten dieser Sätze über die cyclischen Ebenen und noch manche andere lassen sich auch aus analogen Sätzen über die Focalaxen der Kegelflächen II. Ordnung ableiten, wenn man rechtwinklig auf einander bezogene Strahlenbündel zu Hülfe nimmt. Wir nennen zwei Bündel S und S_1 rechtwinklig auf einander bezogen, wenn jeder Ebene des einen der zu ihr normale Strahl des anderen zugewiesen ist, also auch jedem Ebenenbüschel des einen ein zu ihm projectivischer Strahlenbüschel des anderen, dessen Ebene auf der Axe des Ebenenbüschels normal ist. Vier harmonischen Ebenen des einen Bündels entsprechen demnach allemal vier harmonische Strahlen des anderen, welche beziehlich zu jenen Ebenen normal sind. Zwei Elemente des Bündels S bilden dieselben Winkel mit einander, wie die ihnen entsprechenden Elemente des Bündels S_1.

Den Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung des Bündels S entsprechen dann aber die Berührungsebenen einer Kegelfläche II. Ordnung von S_1; denken wir uns jene durch zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugt, so erscheint diese als Erzeugniss der entsprechenden beiden projectivischen Strahlenbüschel. Zwei Strahlen, welche durch die eine Kegelfläche harmonisch getrennt sind, entsprechen ferner zwei Ebenen, welche durch zwei Berührungsebenen der anderen Kegelfläche harmonisch getrennt sind; woraus folgt, dass überhaupt conjugirten Elementen allemal conjugirte Elemente entsprechen. Zwei zu einander normalen Strahlen oder Ebenen, welche bezüglich der einen Kegelfläche conjugirt sind, entsprechen demnach zwei zu einander normale Ebenen resp. Strahlen, welche conjugirt sind bezüglich der anderen Kegelfläche. Und jeder

cyclischen Ebene der einen Kegelfläche entspricht folglich eine Focalaxe der anderen, desgleichen jeder Symmetrie-Ebene eine Hauptaxe. Wir können deshalb die Eigenschaften der Focalaxen ohne Weiteres in solche der cyclischen Ebenen einer Kegelfläche II. Ordnung übersetzen, und erhalten so beispielsweise den Satz (vergl. Seite 156):

„Die Summe resp. Differenz der beiden Winkel, welche eine „beliebige Berührungsebene der Kegelfläche mit den beiden „reellen cyclischen Ebenen bildet, ist constant."

Sind zwei rechtwinklig auf einander bezogene Kegelflächen II. Ordnung gegeben, so entspricht jeder von der einen Kegelfläche ausgeschlossenen Ebene ein zu ihr normaler, von der anderen Kegelfläche eingeschlossener Strahl. Und wenn von allen ebenen Winkeln, welche die zweite Kegelfläche einschliesst, derjenige der grösste ist, in welchem die reellen Focalaxen f, f' der Fläche liegen, so muss folglich von allen Flächenwinkeln, welche die erstere Kegelfläche ausschliesst, der ihre reellen cyclischen Ebenen enthaltende der grösste sein. Da nun in der That eine Kegelfläche II. Ordnung von ihrer ersten Symmetrie-Ebene $\overline{ff'}$ einen grösseren Winkel einschliesst als von ihrer dritten (Seite 156), so finden wir:

„Die reellen cyclischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ einer Kegelfläche „II. Ordnung schneiden sich in der dritten Hauptaxe, welche „mit der zweiten Hauptaxe und den beiden reellen Focalaxen „in einer Ebene, aber ausserhalb der Kegelfläche liegt."

Die beiden ersten Symmetrie-Ebenen der Kegelfläche halbiren demnach die von $\varkappa$ und $\varkappa'$ gebildeten Flächenwinkel, dagegen ist die dritte Symmetrie-Ebene zu $\varkappa$ und $\varkappa'$ normal.

Constructions-Aufgaben und Lehrsätze.

Harmonische Gebilde.

1. Zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren (Seite 34 und 38).

2. Nach dem (unzugänglichen) Schnittpunkte von zwei Geraden aus einem gegebenen Punkte ihrer Ebene eine dritte Gerade zu ziehen (Seite 3 und 36).

3. Ohne Benutzung des Cirkels eine Strecke AC zu halbiren, wenn eine Parallele der Geraden $\overline{AC}$ gegeben ist (Seite 38).

4. In der Ebene sind gegeben ein Parallelogramm und eine beliebige Strecke AC; ohne Hülfe des Cirkels soll AC halbirt und zu $\overline{AC}$ eine Parallele construirt, sodann AC ver-n-facht oder in n gleiche Theile zerlegt werden (Seite 38).

5. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte und beschreibt man über dem Durchmesser AC einen Kreis, von welchem S ein beliebiger Punkt ist, so wird derjenige Kreisbogen, welcher innerhalb des Winkels BSD liegt, entweder von A oder von C halbirt (Seite 37).

6. Zwischen den Schenkeln a, b eines Winkels ist eine Gerade AB so zu ziehen, dass sie in einem gegebenen Punkte P halbirt wird, oder auch so, dass der Punkt A die Strecke PB halbirt (Seite 37).

Projectivische Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde.

7. Zwei Punktreihen u, u_1 werden perspectivisch auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, also beliebig gegen einander verschoben. Es sind die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte zu zeichnen, d. h. der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel II. Ordnung.

8. Zwei Strahlenbüschel werden perspectivisch auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, z. B. gegen einander ver-

dreht; die von ihnen erzeugte Curve II. Ordnung, auf welcher die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen liegen, ist zu zeichnen.

9. Zwei Punktreihen u und u_1 liegen perspectivisch zu einer dritten u_2; der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel II. Ordnung ist zu zeichnen.

10. Zwei Strahlenbüschel S und S_1 liegen perspectivisch zu einer dritten S_2; die von ihnen erzeugte Curve II. Ordnung ist zu zeichnen.

11. Von zwei projectivischen Punktreihen u und u_1 sind drei Paare einander entsprechender Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 gegeben; zu einem beliebigen Punkte D von u ist der entsprechende Punkt D_1 von u_1 zu construiren (Seite 49 und 58), überhaupt ist der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung zu zeichnen. Der erste Theil der Aufgabe ist auch für den Fall auszuführen, wenn u und u_1 in derselben Geraden liegen.

12. Zu der vorhergehenden Aufgabe die reciproke aufzustellen und auszuführen (Seite 58).

13. Liegen die Eckpunkte eines einfachen Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ abwechselnd auf zwei Geraden u und u_1, etwa A, B, C auf u und A_1, B_1, C_1 auf u_1, so liegen auch die Schnittpunkte A_2, B_2, C_2 der drei Paar Gegenseiten desselben auf einer Geraden u_2 (Seite 68). — Die den Satz erläuternde Figur ist ebenso wie die früher (Seite 4) besprochene Fig. 3 wegen ihrer Regelmässigkeit beachtenswerth; sie besteht nämlich aus neun Punkten, die zu dreien auf neun Geraden liegen, und diese neun Geraden gehen zu dreien durch jene neun Punkte. Durch dieselbe Figur wird auch der reciproke Satz dargestellt. Wie lautet derselbe?

14. In dem einen von zwei perspectivischen Strahlenbüscheln sollen zwei zu einander normale Strahlen construirt werden, welchen in dem anderen Büschel zwei gleichfalls zu einander normale Strahlen entsprechen. Aus der Auflösung dieser Aufgabe folgt:

15. In zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte nicht unendlich fern liegen, giebt es allemal zwei einander entsprechende rechte Winkel.

16. Liegen ein Strahlenbüschel S und ein Ebenenbüschel u perspectivisch, so steht die Axe des letzteren normal auf einem der beiden zu einander rechtwinkligen Strahlen von S, welchen in u zwei zu einander rechtwinklige Ebenen entsprechen. Von dieser Bemerkung ausgehend, findet man, dass die folgenden beiden Aufgaben je zwei Lösungen haben.

17. Gegeben ein Strahlenbüschel S und ein zu ihm projectivischer Ebenenbüschel u; es soll:

a. durch irgend einen Punkt eine Ebene gelegt werden, welcher den Ebenenbüschel u in einem mit S congruenten Strahlenbüschel schneidet;

b. eine Axe construirt werden, aus welcher der Strahlenbüschel S durch einen mit u congruenten Ebenenbüschel projicirt wird.

18. Einen Strahlenbüschel S und einen Ebenenbüschel u in solche gegenseitige Lage zu bringen, dass drei gegebene Ebenen α, β, γ des letzteren durch drei gegebene Strahlen a, b, c des ersteren gehen (Aufg. 17).

19. Die Mantelfläche $\alpha\beta\gamma$ eines dreiseitigen Prismas in einem Dreieck abc zu schneiden, welches einem gegebenen Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnlich ist. Diese Aufgabe kann auf die vorhergehende zurückgeführt werden.

Curven, Büschel und Kegelflächen zweiter Ordnung.

20. Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente von einem derselben, oder drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben; die Curve zu construiren mittelst projectivischer Strahlenbüschel (Seite 58 — 60).

21. Von einem Büschel II. Ordnung sind gegeben fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt von einem derselben, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte von zwei derselben; den Büschel zu construiren mittelst projectivischer Punktreihen (Seite 58 — 60).

22. Die drei Aufgaben 20 mit Hülfe des Pascal'schen Satzes zu lösen, und namentlich:

a. auf beliebigen Geraden, welche durch je einen schon bekannten Curvenpunkt hindurchgehen, jedesmal den zweiten Curvenpunkt zu bestimmen;

b. an jedem gegebenen oder construirten Punkte der Curve die Tangente zu zeichnen (Seite 66).

23. Die drei Aufgaben 21 mit Hülfe des Lehrsatzes von Brianchon zu lösen, und namentlich:

a. durch beliebige Punkte eines schon bekannten Strahles jedesmal den zweiten Strahl des Büschels II. Ordnung zu ziehen;

b. in jedem gegebenen oder construirten Strahle des Büschels den Berührungspunkt zu bestimmen (Seite 66).

Anmerkung. Die Aufgaben 22 und 23 enthalten nicht nur eine grosse Zahl besonderer Aufgaben, sondern jede derselben lässt sich ausserdem auf verschiedene Arten lösen, indem man ausser den Sätzen über das Sechseck in der Curve oder im Büschel II. Ordnung auch diejenigen über das Fünfeck, Viereck oder Dreieck benutzen kann. Als specielle Fälle der Aufgaben 22 und 23 nennen wir die folgenden drei:

24. Eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher ausser den beiden Asymptoten noch entweder ein Punkt oder eine Tangente gegeben ist.

25. Eine Parabel zu zeichnen, von welcher gegeben sind entweder vier Tangenten, oder drei Tangenten und der Berührungspunkt von einer derselben, oder zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

26. Eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher drei Punkte und die Richtungen der beiden Asymptoten gegeben sind.

Wie ordnen sich die Aufgaben 24, 25, 26 den Aufgaben 20 und 21 unter?

27. Zu beweisen, dass der Kreis eine Curve II. Ordnung ist, und dass seine Tangenten einen Strahlenbüschel II. Ordnung bilden. Unter welchem Winkel wird derjenige Abschnitt einer beweglichen Kreis-Tangente, welcher zwischen zwei gegebenen Tangenten liegt, vom Mittelpunkte aus gesehen?

28. Eine Punktreihe u und ein Strahlenbüschel S I. Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectivisch auf einander bezogen; dann umhüllen die Normalen, welche aus den Punkten von u auf die entsprechenden Strahlen von S gefällt werden können, eine Parabel, falls sie nicht alle durch einen Punkt gehen (vergl. Seite 75). Die Parabel wird auch von u berührt.

29. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse sich so in der Ebene bewegt, dass sein Scheitelpunkt eine Gerade u beschreibt und der eine Schenkel um einen gegebenen Punkt S sich dreht, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel; dieselbe wird von u berührt.

30. Ein veränderliches Dreieck $A S A_1$ bewegt sich so in der Ebene, dass die Endpunkte A, A_1 der Grundlinie zwei Gerade u und u_1 beschreiben und der Winkel an der Spitze S sich ohne Aenderung seiner Grösse um seinen Scheitelpunkt dreht. Dann umhüllt die Grundlinie $\overline{A A_1}$ eine Curve II. Ordnung, welche auch von u und u_1 berührt wird. (Nach Seite 137 ist S ein Brennpunkt dieser Curve.)

31. Die Grundlinie AA_1 eines veränderlichen Dreiecks APA_1 sei der Grösse nach gegeben und gleite auf einer festen Geraden u hin, während die anderen beiden Seiten $\overline{PA}$ und $\overline{PA_1}$ sich um zwei feste Punkte S und S_1 drehen. Dann beschreibt die Spitze P eine Hyperbel, welche durch S und S_1 geht und die Gerade u zur Asymptote hat.

32. Drehen sich zwei Winkel ab und a_1b_1 von gegebener Grösse in einer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitelpunkte S und S_1, dass der Schnittpunkt $a\dot{a}_1$ von zwei ihrer Schenkel eine Gerade beschreibt, so bewegt sich jeder der übrigen drei Schnittpunkte $b\dot{b}_1$, $a\dot{b}_1$, $a_1\dot{b}$ ihrer Schenkel auf einer durch S und S_1 gehenden Curve II. Ordnung (Newton's organische Beschreibung der Kegelschnitte).

33. Fällt man auf die Ebenen eines Ebenenbüschels a Normalen aus einem beliebigen Punkte P, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise; derselbe hat das von P auf die Axe a gefällte Perpendikel zum Durchmesser, und seine Ebene steht auf a senkrecht. — Daraus folgt:

34. Legt man durch die Schenkel a, a_1 eines schiefen Winkels alle möglichen Paare von zu einander normalen Ebenen, so schneiden sich diese Ebenenpaare in den Strahlen einer durch a und a_1 gehenden Kegelfläche II. Ordnung. Jede zu a oder a_1 normale Ebene schneidet diese Kegelfläche in einem Kreise, und jede zur Ebene $\overline{aa_1}$ normale Ebene schneidet sie in einer Curve II. Ordnung, von welcher in $\overline{aa_1}$ eine Axe liegt.

35. Die im letzten Satze genannte Kegelfläche II. Ordnung erhält man auch mit Hülfe einer Ebene α, die im Punkte $a\dot{a}_1$ auf a_1 senkrecht steht. Lässt man nämlich einen rechten Winkel, dessen Scheitelpunkt $a\dot{\alpha}$ ist, sich so bewegen, dass seine Ebene stets durch die Gerade a geht und der eine Schenkel die Ebene α beschreibt, so muss der andere Schenkel jene Kegelfläche II. Ordnung beschreiben.

36. Wenn zwei concentrische Strahlenbüschel, deren Ebenen sich unter schiefen Winkeln schneiden, so auf einander bezogen werden, dass je zwei homologe Strahlen auf einander senkrecht stehen, so erzeugen sie einen Ebenenbüschel II. Ordnung. Oder mit anderen Worten: Wenn ein rechter Winkel sich so um seinen Scheitelpunkt dreht, dass seine Schenkel in zwei festen Ebenen sich bewegen, so umhüllt seine Ebene eine Kegelfläche II. Ordnung, welche auch von den beiden festen Ebenen berührt wird.

37. Fällt man auf die sämmtlichen Berührungsebenen einer Kegelfläche II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte Normalen, so liegen diese auf einer zweiten Kegelfläche II. Ordnung. Nämlich jene Berührungsebenen werden durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugt, und aus diesen können sofort zwei projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung abgeleitet werden, welche die zweite Kegelfläche erzeugen.

38. Der geometrische Ort eines Punktes S, aus welchem ein ebenes Viereck $KLMN$ durch einen harmonischen Strahlenbüschel $S(KLMN)$ projicirt wird, ist eine dem Viereck umschriebene Curve II. Ordnung (Seite 62). Construirt man zu $\overline{NK}$, $\overline{NL}$ und $\overline{NM}$ den vierten harmonischen Strahl n, so berührt derselbe im Punkte N die Curve, welche hiernach leicht gezeichnet werden kann.

39. Der geometrische Ort einer Geraden u, von welcher ein ebenes Vierseit $klmn$ in einer harmonischen Punktreihe $u\,(klmn)$ geschnitten wird, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welchem auch die vier Geraden k, l, m, n angehören (Seite 62). Der Berührungspunkt des Strahles n ist von nl harmonisch getrennt durch nk und nm.

40. Wir wollen mit v. Staudt eine Gruppe von vier in bestimmter Reihenfolge angenommenen Elementen A, B, C, D eines einförmigen Grundgebildes einen „Wurf“ nennen. Auch sollen zwei Würfe $ABCD$ und $abcd$ „projectivisch“ genannt werden, wenn die beiden Grundgebilde, in welchen sie liegen, projectivisch so auf einander bezogen werden können, dass den Elementen A, B, C, D des einen die Elemente a, b, c, d des anderen entsprechen.

Die Sätze 38 und 39 lassen sich dann folgendermaassen verallgemeinern:

41. Sei $abcd$ ein gegebener Wurf (bestehend etwa aus vier Strahlen eines Büschels I. Ordnung); dann liegen alle Punkte S, aus welchen ein beliebiges ebenes Viereck $KLMN$ durch einen zu $abcd$ projectivischen Wurf $S(KLMN)$ projicirt wird, auf einer dem Viereck umschriebenen Curve II. Ordnung. Wie construirt man deren Tangente im Punkte N? (Vgl. Nr. 38.)

42. Sei $ABCD$ ein gegebener Wurf, dann berühren alle Geraden u, von welchen ein ebenes Vierseit $klmn$ in einem zu $ABCD$ projectivischen Wurfe $u(klmn)$ geschnitten wird, eine dem Vierseit eingeschriebene Curve II. Ordnung. Wie construirt man den Punkt, in welchem diese Curve von n berührt wird? (Vgl. Nr. 39.)

43. Wenn zwei Dreiecke ABC und $D_1E_1F_1$ einer Curve II. Ordnung k^2 eingeschrieben sind, so sind sie auch einer Curve II. Ordnung umschrieben; und umgekehrt. Nämlich die Würfe $A(BCE_1F_1)$ und $D_1(BCE_1F_1)$ sind projectivisch, weil sie in den projectivischen Strahlenbüscheln A und D_1, welche die Curve k^2 erzeugen, einander entsprechen. Ist nun $B_1C_1E_1F_1$ der Schnitt des Büschels $A(BCE_1F_1)$ mit der Geraden $\overline{E_1F_1}$, und $BCEF$ derjenige des Büschels $D_1(BCE_1F_1)$ mit der Geraden $\overline{BC}$, so sind auch $B_1C_1E_1F_1$ und $BCEF$ projectivische Würfe; die sechs Seiten der Dreiecke, nämlich $\overline{BC}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{E_1F_1}$, $\overline{EE_1}$ und $\overline{FF_1}$, sind also wirklich sechs Strahlen eines Büschels II. Ordnung. — Die Umkehrung des Satzes wird analog bewiesen.

Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung.

44. Bezüglich einer Curve II. Ordnung von einer gegebenen Figur die Polarfigur zu zeichnen, d. h. von ihren Punkten die Polaren und von ihren Geraden die Pole zu construiren (Seite 77). Beispiele: ein Polygon und eine beliebige krumme Linie.

45. An eine gegebene Curve II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte Tangenten zu ziehen ohne Benutzung des Cirkels (Seite 77).

46. Bewegen sich zwei veränderliche Tangenten einer Curve II. Ordnung so,

dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte eine zweite Curve II. Ordnung einhüllt, so beschreibt ihr Schnittpunkt eine dritte Curve II. Ordnung.

dass ihr Schnittpunkt eine zweite Curve II. Ordnung durchläuft, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte eine dritte Curve II. Ordnung (Seite 82).

47. Durch lineare Constructionen die Polare eines Punktes oder den Pol einer Geraden hinsichtlich einer Curve II. Ordnung zu bestimmen, welche durch fünf Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte oder fünf Tangenten, gegeben ist, aber nicht gezeichnet vorliegt. (Vgl. Nr. 20—23.)

48. Eine Curve II. Ordnung sei gegeben durch fünf Bedingungen, z. B. durch vier Tangenten und den Berührungspunkt von einer derselben oder durch drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben. Es sollen beliebig viele Durchmesser und der Mittelpunkt der Curve construirt werden. (Nr. 47.)

49. Von einer gegebenen Curve II. Ordnung ist eine Sehne so zu construiren, dass sie in einem gegebenen Punkte P halbirt wird.

50. Alle Sehnen einer Curve II. Ordnung, welche von einer beliebig gegebenen Sehne halbirt werden, umhüllen eine Parabel (Seite 75).

51. Von einer Ellipse oder Hyperbel sind gegeben zwei Paare conjugirter Durchmesser und entweder ein Punkt oder eine Tangente; beliebig viele Punkte oder Tangenten der Curve zu construiren (Seite 89 und 90).

52. Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben zwei Punkte oder zwei Tangenten und ein Paar conjugirter Durchmesser, oder auch drei Punkte oder Tangenten und der Mittelpunkt; die Curve zu construiren (Seite 89 und 90).

53. Eine Parabel zu construiren, wenn von ihr gegeben sind drei Punkte oder Tangenten und die Richtung der Durchmesser (Seite 88), oder aber zwei Punkte oder Tangenten und die Axe.

54. Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten; die Axe zu construiren.

55. Eine Ellipse oder Hyperbel zu construiren, wenn von ihr drei Punkte oder Tangenten und eine Axe gegeben sind.

56. Eine Hyperbel zu construiren aus den Asymptoten und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 92 und 93).

57. Von einer gegebenen Curve II. Ordnung die Axen zu zeichnen (Seite 91).

58. Fällt man aus einem Punkte S auf alle Durchmesser einer Curve k^2 II. Ordnung Normalen, so schneiden diese die resp. conjugirten Durchmesser in den Punkten einer durch S und den Mittelpunkt von k^2 gehenden, gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten mit den Axen von k^2 parallel laufen. Auf dieser Hyperbel liegen die Fusspunkte aller durch S gehenden Normalen von k^2. An eine beliebige Curve II. Ordnung können deshalb aus keinem Punkte ihrer Ebene mehr als vier Normalen gezogen werden.

59. Es seien S und S_1 zwei Punkte einer Curve II. Ordnung, die auf einem beliebigen Durchmesser liegen, und u, u_1 zwei Gerade der Ebene, die irgend zwei conjugirten Durchmessern der Curve parallel sind. Projicirt man dann die Curve aus S und S_1 auf resp. u und u_1, so erhält man (Seite 89) zwei projectivisch ähnliche Punktreihen u, u_1, die also proportional getheilt sind. Eine bekannte, sehr einfache Construction der Ellipse oder Hyperbel gründet sich auf diesen Satz.

60. Projicirt man eine Parabel aus einem ihrer Punkte auf irgend einen Durchmesser u und zugleich aus ihrem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Gerade u_1, so erhält man in u und u_1 zwei projectivisch ähnliche Punktreihen. Hieraus folgt eine sehr einfache Parabel-Construction.

61. Sind in einer Ebene zwei Curven II. Ordnung gegeben, so hat in Bezug auf dieselben jeder Punkt A der Ebene zwei Polaren, und wir können den Schnittpunkt A_1 dieser beiden Polaren dem Punkte A zuordnen. Die beiden Polaren von A_1 gehen dann durch A, und je zwei einander zugeordnete Punkte, wie A und A_1, sind hinsichtlich beider Curven conjugirt. Ebenso können wir je zwei Strahlen der Ebenen einander zuordnen, welche in Bezug auf beide Curven II. Ordnung conjugirt sind. Ich behaupte nun (vergl. Seite 82):

Den Punkten einer Geraden sind im Allgemeinen die Punkte einer Curve II. Ordnung zugeordnet. Alle Curven II. Ordnung, welche auf diese Art den Geraden der Ebene zugeordnet sind, haben mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte U, V, W mit einander gemein. Die beiden Polaren jedes solchen gemeinschaftlichen Punktes fallen zusammen, sodass dem Punkte alle Punkte einer Geraden zugeordnet sind.

Den Strahlen eines Punktes sind im Allgemeinen die Tangenten einer Curve II. Ordnung zugeordnet. Alle Curven II. Ordnung, deren Tangenten den Strahlen je eines Punktes zugeordnet sind, haben mindestens eine und höchstens drei Tangenten u, v, w mit einander gemein. Die beiden Pole von jeder solchen gemeinschaftlichen Tangente fallen zusammen, sodass der Tangente alle Strahlen eines Punktes zugeordnet sind.

Sind die gegebenen beiden Curven II. Ordnung einem Viereck umschrieben, so schneiden sich dessen drei Paar Gegenseiten in den Punkten U, V, W. Diese drei Punkte sind die Eckpunkte und die Geraden u, v, w sind die Seiten eines gemeinschaftlichen Poldreiecks der beiden Curven.

62. In der Ebene einer Curve k^2 II. Ordnung können je zwei Strahlen einander zugeordnet werden, welche sich rechtwinklig schneiden und zugleich hinsichtlich der Curve k^2 conjugirt sind. Den Strahlen eines eigentlichen Punktes S, der auf keiner Axe der Curve liegt (Seite 131), sind dann die Tangenten einer Parabel zugeordnet (Nr. 28), welche auch von der Polare des Punktes S und von den Axen der Curve k^2 berührt wird.

Von jeder gemeinschaftlichen Tangente der Parabel und der Curve k^2 wird die letztere in dem Fusspunkte einer von S an k^2 gezogenen Normale berührt. (Vergl. Nr. 58.)

63. Werden in einem Strahlenbündel eine Kegelfläche K^2 II. Ordnung und ein bestimmter Strahl u angenommen, so können je zwei Strahlen a, a_1 desselben einander zugeordnet werden, welche bezüglich K^2 conjugirt sind und mit u in einer Ebene liegen. Beschreibt dann a eine Ebene α, so beschreibt a_1 eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch u und den Polstrahl der Ebene α geht und mit K^2 jeden in α und in der Polarebene von u liegenden Strahl von K^2 gemein hat (vergl. Seite 84). — Wie lautet der reciproke Satz?

64. Die in Nr. 61, 62 und 63 besprochenen geometrischen Beziehungen gehören zu den „Verwandtschaften zweiten Grades", von welchen in der zweiten Abtheilung ausführlicher die Rede sein wird; sie können benutzt werden zur Verwandlung einfacher Gebilde in complicirtere. Von diesen Verwandtschaften verdient die unter dem Namen „Princip der reciproken Radien" bekannte hier einen besonderen Platz; denn sie ist nicht blos für die synthetische Geometrie, sondern auch für gewisse Untersuchungen der mathematischen Physik und der Functionentheorie von grosser Wichtigkeit. Dieses Verwandlungs-Princip stellt sich dar als ein sehr specieller Fall einer früher (Seite 84) angegebenen Verwandtschaft zweiten Grades, wie Sie gleich bemerken werden.

Das Princip der reciproken Radien.*)

65. In Bezug auf einen Kreis vom Radius r und dem Mittelpunkte M wollen wir je zwei Punkte P, P_1 der Ebene einander zuordnen, welche mit M in einer Geraden liegen und hinsichtlich des Kreises conjugirt sind. Dann sind P und P_1 durch die Endpunkte eines Kreisdurchmessers harmonisch getrennt, und es ist folglich (Seite 40):

$$MP \,.\, MP_1 = r^2 \quad \text{oder} \quad MP = \frac{r^2}{MP_1}.$$

Das Product der Radii vectores von zwei zugeordneten Punkten ist also constant, oder der Radius vector eines beliebigen Punktes P

*) Für ein eingehenderes Studium dieses Abbildungs-Principes empfehle ich „Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie", Leipzig 1869, S. 159—183.

ist demjenigen seines zugeordneten Punktes P_1 umgekehrt proportional. Deshalb hat dieses Abbildungsprincip von Liouville*) den Namen „Princip der reciproken Radien“ erhalten; M heisst der „Mittelpunkt“, und r^2 die „Potenz“ der reciproken Radien. Jedem von dem Kreise eingeschlossenen Punkte ist ein ausserhalb gelegener Punkt und jedem unendlich fernen Punkte der Ebene ist der Mittelpunkt M zugeordnet; die Punkte der Kreislinie fallen mit ihren zugeordneten zusammen.

66. Die Polare des Punktes P in Bezug auf den gegebenen Kreis steht in dem zugeordneten Punkt P_1 auf $\overline{MP}$ senkrecht. Zu den Punkten P, Q, R, ... einer beliebigen Geraden g findet man also die zugeordneten Punkte P_1, Q_1, R_1, ..., indem man aus dem Pole G von g auf die resp. Geraden $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$, ... Normalen fällt. Daraus folgt:

„Einer beliebigen Geraden g ist eine Kreislinie γ zugeordnet,
„deren zu g normaler Durchmesser von M und dem Pole G
„der Geraden begrenzt wird.“

Umgekehrt ist jeder durch M gehenden Kreislinie γ eine Gerade g zugeordnet; denn der Verbindungslinie von zwei Punkten A, B, deren zugeordnete A_1, B_1 auf γ liegen, ist eine Kreislinie zugeordnet, welche durch A_1, B_1 und M geht und folglich mit γ identisch ist. Möbius**) nennt wegen dieser Eigenthümlichkeit die vorliegende Verwandtschaft zweiten Grades eine „Kreisverwandtschaft“.

67. Zieht man zu der Geraden g eine Parallele durch den Mittelpunkt M der reciproken Radien, so berührt dieselbe in M den der g zugeordneten Kreis γ, weil sie ebenso wie g auf dem Durchmesser MG von γ senkrecht steht. Wir schliessen daraus:

„Zwei beliebige Gerade f und g der Ebene schneiden sich unter
„denselben Winkeln, wie die ihnen zugeordneten Kreislinien
„φ und γ.“

Zwei unendlich kleine, einander zugeordnete Dreiecke haben demnach gleiche Winkel und sind ähnlich; oder mit anderen Worten:

„Durch die reciproken Radien wird die Ebene conform auf sich
„selbst abgebildet, sodass die kleinsten Theile von je zwei ein-
„ander zugeordneten Figuren einander ähnlich sind.“

*) Liouville in seinem „Journ. de Mathématiques“, I. Série T. XII, p. 265.

**) Moebius in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1855, Bd. II, S. 531—595, und in den Berichten über die Verhandlungen derselben Gesellschaft von 1853, S. 14—24.

Nur auf den unendlich kleinen Theil der Ebene, welcher dem Mittelpunkte M zunächst liegt, findet dieser Satz keine Anwendung.

68. Weil eine Gerade auch als Kreis von unendlich grossem Radius aufgefasst werden kann, so dürfen wir den Satz, dass jeder durch M gehenden Kreislinie eine Gerade zugeordnet ist, und seine Umkehrung (Nr. 66) als Specialfälle des folgenden Satzes ansehen:

„Jeder Kreislinie $\varkappa$ ist durch die reciproken Radien eine Kreis-
„linie $\varkappa_1$ zugeordnet; M ist ein Aehnlichkeitspunkt von $\varkappa$ und $\varkappa_1$."

Um diesen allgemeineren Satz zu beweisen, nehmen wir auf $\varkappa$ einen festen Punkt P und einen beweglichen Q an, und bezeichnen mit P_1 und Q_1 die beiden ihnen zugeordneten Punkte, mit P' und Q' dagegen die Punkte, in welchen $\varkappa$ von den resp. Secanten $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ zum zweiten Male geschnitten wird. Dann ist wegen des Satzes über die Abschnitte von Kreissecanten:

$$MP \,.\, MP' = MQ \,.\, MQ',$$

und wegen des Princips der reciproken Radien:

$$MP \,.\, MP_1 = MQ \,.\, MQ_1 \; (= r^2);$$

folglich auch:

$$MP' : MP_1 = MQ' : MQ_1 \quad \text{und} \quad \Delta\, MP'Q' \sim \Delta\, MP_1 Q_1.$$

Wenn also Q und damit zugleich Q' die Kreislinie $\varkappa$ durchläuft, so beschreibt Q_1 eine zu $\varkappa$ ähnliche und ähnlich liegende Curve, d. h. gleichfalls eine Kreislinie $\varkappa_1$. Und zwar ist M der äussere Aehnlichkeitspunkt, und Q' und Q_1, sowie P' und P_1 sind „homologe" Punkte der beiden Kreislinien $\varkappa$ und $\varkappa_1$; je zwei einander zugeordnete Punkte derselben, wie Q und Q_1 oder P und P_1 liegen in Bezug auf M „invers" auf $\varkappa$ und $\varkappa_1$.

69. „Jede Kreislinie, welche durch ein Paar zugeordneter
„Punkte P, P_1 geht, ist sich selbst zugeordnet und schneidet
„den zuerst angenommenen Kreis, dessen Punkte mit ihren zu-
„geordneten zusammenfallen, rechtwinklig."

Denn sie hat mit der ihr zugeordneten Kreislinie die Punkte P, P_1 und zwei sich selbst zugeordnete Punkte gemein, und wird in den letzteren von zwei durch M gehenden Geraden berührt, weil $MP \,.\, MP_1 = r^2$ ist.

70. Denkt man sich in der Ebene zwei Punktsysteme $P, Q, R, \ldots$ und $P_1, Q_1, R_1, \ldots$, die dem Princip gemäss einander zugeordnet sind, und dreht man sodann das eine derselben um den Mittelpunkt M, bis jeder von seinen Punkten einen Halbkreis beschrieben

hat, so liegen wiederum je zwei zugeordnete Punkte, wie P und P_1 oder Q und Q_1, mit M auf einer Geraden, aber auf entgegengesetzten Seiten von M; und es ist wie früher:

$$MP \,.\, MP_1 = MQ \,.\, MQ_1 = MR \,.\, MR_1 = \ldots = \text{Const.},$$

aber die „Potenz", d. h. das constante Product der Radii vectores zugeordneter Punkte hat nicht mehr einen positiven, sondern einen negativen Werth. Wir erhalten so einen zweiten Fall des Princips der reciproken Radien, welcher sich von dem ersteren auch dadurch unterscheidet, dass kein Punkt der Ebene mit seinem zugeordneten zusammenfällt. Auch in diesem zweiten Falle ist die Ebene conform auf sich selbst abgebildet, jeder Geraden ist ein durch M gehender Kreis zugeordnet, und überhaupt jedem Kreise $\varkappa$ ein Kreis $\varkappa_1$; doch ist der Mittelpunkt M der reciproken Radien jetzt nicht mehr äusserer, sondern innerer Aehnlichkeitspunkt von je zwei einander zugeordneten Kreisen.

71. Auch die Punkte des Raumes können nach dem Princip der reciproken Radien einander paarweise zugeordnet werden, indem man den Mittelpunkt M und den positiven oder negativen Werth der Potenz willkürlich annimmt. Am Leichtesten ist diese Verallgemeinerung durchzuführen, indem man zunächst die Punkte einer beliebig durch M gelegten Ebene einander zuordnet und sodann diese Ebene um eine durch M gehende Axe dreht. Zwei zugeordnete Punkte der Ebene stellen dann bei jeder Lage derselben zwei einander zugeordnete Punkte des Raumes vor.

72. Dreht man die Ebene um die durch M gehende Centrale von zwei einander zugeordneten Kreisen, so beschreiben die letzteren zwei Kugelflächen; also:

„Jeder Kugelfläche $\varkappa$ ist durch die reciproken Radien eine „Kugelfläche $\varkappa_1$ zugeordnet, und M ist ein Aehnlichkeitspunkt „von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ (Nr. 68). Jeder Ebene Γ ist eine durch M gehende „Kugelfläche zugeordnet, die in M von einer zu Γ parallelen „Ebene berührt wird."

Der letzte Theil dieses Satzes ist als Specialfall des ersten anzusehen, aber auch leicht besonders zu beweisen. — Weiter ergiebt sich daraus:

„Zwei beliebige Ebenen des Raumes schneiden sich unter den„selben Winkeln, wie die ihnen zugeordneten Kegelflächen."

Zwei unendlich kleine Tetraëder, deren Eckpunkte einander zugeordnet sind, haben demnach gleiche Flächenwinkel und folglich auch gleiche Kantenwinkel; sie sind (wie einige Ueberlegung lehrt)

ähnlich, wenn die Potenz der reciproken Radien negativ, und symmetrisch ähnlich, wenn sie positiv ist. Weil demnach ihre homologen Flächen allemal ähnlich sind, so ergiebt sich:

„Zwei einander zugeordnete Flächen sind durch die reciproken „Radien conform auf einander abgebildet."

73. Um hiernach eine Kugelfläche $\varkappa$ auf eine beliebige Ebene Σ conform abzubilden, wähle man zum Mittelpunkt M der reciproken Radien einen der beiden Punkte von $\varkappa$, deren Berührungsebenen zu Σ parallel sind, und setze die Potenz gleich dem Product der beiden Abschnitte MP und MP_1, welche $\varkappa$ und Σ auf irgend einer durch M gelegten Geraden bilden. Der Ebene Σ ist dann eine Kugelfläche zugeordnet, welche mit der gegebenen $\varkappa$ die Punkte P und M, sowie die Berührungsebene in M gemein hat und folglich mit $\varkappa$ zusammenfällt. Also:

„Projicirt man eine Kugelfläche $\varkappa$ (stereographisch) aus einem „auf ihr liegenden Punkte M auf eine Ebene Σ, die zu der Be- „rührungsebene von M parallel ist, so wird dadurch die Fläche $\varkappa$ „conform auf die Ebene Σ abgebildet."

Von dieser stereographischen Projection der Kugelfläche wird bei der Herstellung von Landkarten vielfach Gebrauch gemacht. Man erreicht dadurch, dass wenigstens die Winkel auf der Karte dieselbe Grösse haben wie die ihnen entsprechenden auf der Erdoberfläche; die Längen der verschiedenen Linien unserer Erdoberfläche sind auf den Landkarten allemal in veränderlichem Maassstabe dargestellt, weil eine Kugelfläche sich nicht ohne Verzerrungen auf einer Ebene abwickeln lässt.

74. „Einer beliebigen Kreislinie ist durch die reciproken „Radien allemal eine Kreislinie zugeordnet";

in der letzteren schneiden sich je zwei Kugelflächen, deren zugeordnete durch die erstere gehen. Wenn insbesondere die eine Kreislinie durch M geht, so artet die andere in eine Gerade aus (Nr. 66). Die Meridiane und Parallelkreise der Erdoberfläche gehen deshalb durch die stereographische Projection in zwei Schaaren orthogonaler Kreise über; die Projectionen der Meridiane sind Kreise, die sich in zwei Punkten (den Projectionen des Nord- und des Südpoles) schneiden, und zu ihnen sind die Projectionen der Parallelkreise, welche keinen reellen Punkt mit einander gemein haben, rechtwinklig. Nur die durch M gehenden Kugelkreise werden in der Bildebene durch gerade Linien dargestellt. — Verlegt man insbesondere den Projections-Mittelpunkt M in den Nord-

oder Südpol, so werden die Parallelkreise durch concentrische Kreise und die Meridiane durch die Durchmesser derselben dargestellt.

75. Zu drei beliebig angenommenen Kugelflächen kann man im Allgemeinen eine orthogonale, d. h. sie rechtwinklig schneidende Kreislinie construiren; dieselbe liegt in der Centralebene und ihr Mittelpunkt ist ein Potenzpunkt der drei Kugelflächen. Nur dann wird die Construction unmöglich, wenn ein Punkt der Centralebene innerhalb oder auf jeder der drei Kugelflächen liegt. — Wählt man nun einen Punkt jener orthogonalen Kreislinie zum Mittelpunkte reciproker Radien, so wird die Kreislinie in eine Gerade transformirt, die drei Kugelflächen aber in drei andere Kugelflächen, welche von der Geraden rechtwinklig geschnitten werden, und deren Mittelpunkte folglich auf der Geraden liegen. Drei Kugelflächen, die nicht durch einen und denselben Punkt gehen, können demnach allemal durch reciproke Radien in drei andere Kugelflächen verwandelt werden, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen.

76. Eine Schaar von Kugelflächen, welche durch stetige Bewegung einer veränderlichen Kugelfläche beschrieben ist, wird im Allgemeinen von einer Fläche F eingehüllt, die eine Schaar von kreisförmigen Krümmungslinien besitzt. Nämlich jede Kugelfläche der Schaar wird von F längs der Kreislinie berührt, welche sie mit der unmittelbar benachbarten Kugelfläche der Schaar gemein hat; und weil die Normalen von F in den Punkten dieser Linie sich im Centrum der Kugelfläche schneiden, so ist die Kreislinie eine Krümmungslinie von F. Wird nun die Fläche F durch reciproke Radien in eine andere Fläche F_1 transformirt, so gehen zugleich jene Krümmungslinien über in kreisförmige Krümmungslinien von F_1, indem F_1 diejenige Schaar von Kugelflächen einhüllt, welche der von F eingehüllten Schaar zugeordnet ist. Alle Flächen, welche durch reciproke Radien in Rotationsflächen transformirt werden können, besitzen deshalb, wie diese, eine Schaar von kreisförmigen Krümmungslinien.

77. Eine der merkwürdigsten unter diesen Flächen ist die von Dupin entdeckte „Cyclide“. Dieselbe wird von einer veränderlichen Kugelfläche umhüllt, welche bei ihrer stetigen Bewegung fortwährend drei gegebene Kugelflächen berührt. Die Theorie der Cyclide können Sie auf Grund des Vorhergehenden leicht entwickeln, indem Sie die folgenden Sätze beweisen.

„Eine Dupin'sche Cyclide verwandelt sich durch reciproke „Radien allemal wieder in eine Cyclide; sie kann, wenn der „Mittelpunkt der reciproken Radien passend gewählt wird, sogar „in eine Rotations-Cyclide transformirt werden, welche von einer „um eine Gerade sich drehenden Kugelfläche umhüllt wird (Nr. 75). „Die Cyclide besitzt deshalb zwei Schaaren von kreisförmigen „Krümmungslinien, und wird in denselben von zwei Schaaren „von Kugelflächen berührt; die Mittelpunkte dieser Kugelflächen „und Krümmungslinien liegen mit je zwei der letzteren in zwei „zu einander normalen Symmetrie-Ebenen der Cyclide. Jede „Kugelfläche der einen Schaar berührt alle Kugelflächen der „anderen Schaar in den Punkten einer kreisförmigen Krümmungs- „linie. Zwei Krümmungslinien können durch eine Kugelfläche „verbunden werden, wenn sie zu derselben Schaar gehören; im „anderen Falle haben sie einen gemeinschaftlichen Punkt und „schneiden sich in demselben rechtwinklig."

78. „Die Cyclide hat entweder keinen (reellen) Doppel- „punkt, oder zwei Knotenpunkte, in welchen alle Krümmungs- „linien der einen Schaar sich schneiden, oder einen Cuspidal- „punkt, in welchem dieselben sich berühren. Von diesen drei „Hauptarten erhält man wesentlich verschiedene Formen, wenn „man die zugehörige Rotationscyclide transformirt durch reci- „proke Radien, deren Mittelpunkt einmal innerhalb, einmal auf „und einmal ausserhalb der Rotationscyclide angenommen wird. „Die letzteren beiden Hauptarten können durch reciproke Ra- „dien auf einer geraden Kegel- resp. Cylinderfläche conform „abgebildet werden."

„Die Ebenen, in welchen die Krümmungslinien der einen „oder der anderen Schaar (paarweise) liegen, schneiden sich „alle in einer Geraden; dieselbe liegt in der einen Symmetrie- „Ebene und steht auf der anderen senkrecht. Die Cyclide wird „von gewissen zwei Ebenen in allen Punkten je eines Kreises „berührt. — Verbindet man die Krümmungslinien der einen „oder der anderen Schaar mit einem beliebigen Punkte M durch „Kugelflächen, so schneiden diese sich alle in einer Kreislinie."

„Wenn eine Cyclide sich in das Unendliche erstreckt (was „bei jeder der drei Hauptarten eintreten kann), so besitzt sie zwei „gerade Krümmungslinien, die sich rechtwinklig kreuzen. Die „Ebenen aller übrigen Krümmungslinien gehen theils durch die eine, „theils durch die andere von diesen beiden windschiefen Geraden."

Anmerkung. Eine Fläche F wird in einem beliebigen Punkte P von unendlich vielen Kugelflächen berührt, und von denselben zugleich in Curven geschnitten, welche zweimal durch P gehen und in P je zwei Tangenten haben. Ich finde nun durch eine einfache Rechnung, dass diese Tangentenpaare symmetrisch liegen zu den Tangenten der beiden durch P gehenden Krümmungslinien der Fläche F, dass also die Winkel, welche irgend eines jener Tangentenpaare bildet, von den Krümmungslinien halbirt werden. Nur wenn die berührende Kugelfläche eine „Krümmungskugel" der Fläche F ist, d. h. wenn ihr Mittelpunkt mit einem der beiden Krümmungs-Centra des Punktes P zusammenfällt, vereinigen sich die beiden Tangenten der Schnittcurve mit derjenigen der zugehörigen Krümmungslinie von F, indem zugleich P ein Rückkehrpunkt der Schnittcurve wird. — Ohne Weiteres folgt hieraus:

„Transformirt man eine Fläche F durch reciproke Radien in eine andere F_1, „so verwandeln sich zugleich die sie berührenden Kugelflächen und ins- „besondere ihre Krümmungskugeln in die berührenden resp. Krümmungs- „kugeln der Fläche F_1; und da die Winkel durch die Transformation sich „nicht ändern, so werden die Krümmungslinien von F in diejenigen von F_1 „transformirt."

Der letzte Theil dieses Satzes ist u. A. schon von Liouville bewiesen worden.

Regelschaaren und Regelflächen zweiter Ordnung.

79. Die Mittelpunkte aller Kegelflächen zweiter Ordnung, welche von den sechs Seitenlinien eines beliebigen windschiefen Sechseckes berührt werden, erfüllen eine Regelfläche; dieselbe geht durch die drei Hauptdiagonalen des Sechsecks (vgl. Seite 72 u.).

80. Die drei Hauptdiagonalen eines windschiefen Sechsecks, dessen sechs Seitenlinien auf einer Regelfläche liegen, schneiden sich in einem Punkte.

81. Eine Punktreihe u und ein Strahlenbüschel S I. Ordnung, die nicht in parallelen Ebenen liegen, seien projectivisch auf einander bezogen; dann bilden die Strahlen, welche durch die Punkte von u parallel zu den entsprechenden Strahlen von S gezogen werden können, die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (vgl. Seite 75).

82. Eine Punktreihe u und ein Ebenenbüschel v seien projectivisch, und ihre Träger nicht zu einander rechtwinklig; dann bilden die Normalen, welche aus den Punkten von u auf die entsprechenden Ebenen von v gefällt werden können, die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (Nr. 81).

83. Werden auf einer Regelfläche in den Punkten eines in ihr liegenden Strahles Normalen errichtet, so bilden dieselben die

eine Regelschaar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides (Nr. 82; vgl. Seite 99).

84. Werden durch einen beliebigen Punkt zu allen Strahlen einer Regelschaar Normal-Ebenen gelegt, so bilden diese einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung, jenachdem die Regelschaar einem hyperbolischen Paraboloid oder einem einschaligen Hyperboloid angehört (Seite 102).

85. Alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen und ein gegebenes einschaliges Hyperboloid in Parabeln schneiden, umhüllen eine Kegelfläche II. Ordnung, welche dem Asymptotenkegel parallel ist.

86. Eine Regelfläche zu construiren, von welcher gegeben sind zwei Strahlen a, b, die nicht in einer Ebene liegen, und entweder drei ausserhalb a und b liegende Punkte oder drei nicht durch a oder b gehende Berührungs-Ebenen.

87. Welches ist der Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte A durch eine Regelfläche harmonisch getrennt ist? Welche Linie hat dieser geometrische Ort mit einer durch A gehenden Ebene gemein?

Projectivische Elementargebilde; geradlinige Flächen dritter Ordnung.

88. In einem Elementargebilde II. Ordnung zu drei gegebenen Elementen das vierte harmonische zu construiren, z. B. in einer Curve II. Ordnung zu drei Punkten den vierten harmonischen.

89. Ein Strahlenbüschel I. und ein Büschel II. Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectivisch auf einander bezogen. Die Curve III. Ordnung zu zeichnen, auf welcher alle Schnittpunkte homologer Strahlen der Büschel liegen (Seite 109).

90. Die zu Nr. 89 reciproke Aufgabe betrifft einen Strahlenbüschel III. Ordnung; derselbe soll gezeichnet werden.

91. Die Curve IV. Ordnung zu zeichnen, welche von zwei projectivischen Strahlenbüscheln II. Ordnung erzeugt wird (Seite 116).

92. Den von zwei projectivischen Curven II. Ordnung erzeugten Strahlenbüschel IV. Ordnung zu zeichnen.

93. Auf einer Curve II. Ordnung liegt der Scheitelpunkt S eines Winkels von gegebener Grösse, welcher eine Sehne $\overline{AB}$ der Curve einschliesst. Dreht sich dieser Winkel um S, so beschreibt die Sehne $\overline{AB}$ einen Strahlenbüschel II. Ordnung (Seite 112); nur wenn der Winkel ein rechter ist, dreht sich $\overline{AB}$ um einen Punkt (Seite 130).

94. Einer Curve II. Ordnung ist ein Dreieck ABP umschrieben, dessen Grundlinie AB in einer gegebenen Tangente u der Curve liegt und von gegebener Länge ist. Gleitet diese Grundlinie auf u fort, so beschreibt die Spitze P des Dreiecks eine neue Curve II. Ordnung (Seite 112). Insbesondere ergiebt sich:

95. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse einer Parabel umschrieben ist, und seine beiden Schenkel auf der Parabel hinrollen, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Hyperbel und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte einen Büschel II. Ordnung. Nur der rechte Winkel macht eine Ausnahme (Lehrsatz 105).

96. Es seien gegeben eine Kegelfläche II. Ordnung und zwei sich nicht schneidende Gerade a, b, welche entweder zu zwei Strahlen der Kegelfläche parallel laufen oder auf zwei Berührungs-Ebenen derselben senkrecht stehen. Bewegt sich dann eine dritte Gerade so, dass sie die Geraden a und b schneidet und stets zu irgend einem Strahle der Kegelfläche parallel oder (im zweiten Falle) zu irgend einer Berührungsebene derselben normal ist, so beschreibt sie ein einschaliges Hyperboloid (Seite 110).

97. Ein gerades Gebilde u und eine Punktreihe k^2 II. Ordnung, die projectivisch auf einander bezogen sind, aber weder in einer Ebene liegen, noch einen Punkt entsprechend gemein haben, erzeugen mit einander eine Schaar von Geraden, die wir eine „Regelschaar III. Ordnung“ *) nennen wollen. Eine beliebige Gerade g schneidet mindestens einen Strahl und höchstens drei Strahlen dieser Schaar, wie sich leicht ergiebt (Seite 108), wenn man die Punktreihe u aus der Axe g durch einen Ebenenbüschel projicirt. Die Regelschaar III. Ordnung wird aus einem beliebigen Punkte im Allgemeinen durch einen Ebenenbüschel III. Ordnung projicirt (vgl. Seite 109. u.).

98. Jede durch u gehende Ebene, welche die Curve k^2 schneidet, enthält zwei Strahlen der Regelschaar III. Ordnung. Projicirt man nun aus dem Schnittpunkte D von zwei solchen Strahlen die beiden projectivischen Punktreihen u und k^2, so erhält man einen Strahlenbüschel I. Ordnung und eine Kegelfläche II. Ordnung, welche projectivisch sind und zwei Strahlen entsprechend gemein haben, also (Seite 110) einen Ebenenbüschel d erster Ordnung erzeugen.

*) Vgl. die Inaugural-Dissertation des Herrn Benno Klein „Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene“, 1876.

Alle Strahlenpaare der Regelschaar, welche in den durch u gehenden Ebenen liegen, schneiden sich demnach in den Punkten einer Geraden d, und aus jedem dieser Schnittpunkte wird die Regelschaar durch einen zu u und k^2 perspectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung projicirt. Wir können die beiden Geraden u und d etwa „Leitlinien" der Regelschaar III. Ordnung nennen, weil sie alle Strahlen der Schaar schneiden. Nur dann fällt d mit u zusammen, wenn u die Curve k^2 schneidet; in diesem Specialfalle ist die Leitlinie u zugleich ein Strahl der Regelschaar.

99. Aus einem Punkte S, welcher auf einem Strahle a der Regelschaar III. Ordnung, jedoch auf keiner der Leitlinien u und d liegt, werden die projectivischen Punktreihen u und k^2 durch einen Strahlenbüschel I. Ordnung und eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, welche den Strahl a entsprechend gemein haben und folglich (Seite 111) einen zu u und k^2 perspectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung erzeugen. Durch diesen Ebenenbüschel II. Ordnung wird also die Regelschaar III. Ordnung aus dem beliebig auf ihr liegenden Punkte S projicirt. Da derselbe projectivisch ist zu dem Ebenenbüschel d, welcher ebenfalls zu den Punktreihen u und k^2 perspectivisch ist, so ergiebt sich:

100. Die Regelschaar III. Ordnung wird auch erzeugt durch den Ebenenbüschel d I. Ordnung, auf dessen Axe die Strahlen der Schaar sich paarweise schneiden, und durch einen zu d projectivischen Ebenenbüschel S II. Ordnung, dessen Mittelpunkt beliebig auf der Regelschaar angenommen werden kann. Diese zweite Erzeugungsart ist der zuerst angegebenen reciprok, und die Regelschaar III. Ordnung ist folglich sich selbst reciprok. Gehen wir aus von der zweiten Erzeugungsart der Schaar, so gelangen wir zu Sätzen, welche den vorhin bewiesenen reciprok sind. So ergiebt sich u. A.:

Die Regelschaar III. Ordnung wird aus einem beliebigen Punkte, der auf einem ihrer Strahlen liegt, durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt;

Die Regelschaar III. Ordnung wird von einer beliebigen Ebene, die durch einen ihrer Strahlen geht, in einer Curve II. Ordnung geschnitten;

und alle solche projicirenden Ebenenbüschel und Schnittcurven II. Ordnung sind zu einander, zu der Punktreihe I. Ordnung u und zu dem Ebenenbüschel I. Ordnung d projectivisch. Die Schnittcurven II. Ordnung liegen zu dem Büschel d und zu allen projicirenden Ebenenbüscheln II. Ordnung perspectivisch.

101. Die Regelschaar III. Ordnung liegt auf einer geradlinigen Fläche F^3 dritter Ordnung, welche von einer beliebigen Geraden in höchstens drei Punkten und von einer beliebigen Ebene in einer Curve III. Ordnung geschnitten wird. Durch die Leitlinie d geht die Fläche F^3 zweimal, und auf ihr liegt von jeder ebenen Schnittlinie der Fläche ein eigentlicher oder isolirter Doppelpunkt. Die Ebenen, welche durch die Strahlen der Regelschaar III. Ordnung gehen, schneiden die geradlinige Fläche F^3 in diesen Strahlen und in je einer Curve II. Ordnung; diese Curve wird von dem zugehörigen Strahle der Regelschaar in zwei Punkten geschnitten, von welchen der eine auf der Doppellinie d liegt, während in dem anderen die Fläche F^3 von der Curvenebene berührt wird. Die Ebenen, welche durch die Strahlen der Regelschaar gehen, sind also Berührungsebenen der Fläche F^3 dritter Ordnung; die Ebenen der Leitlinie u, in welchen jene Strahlen paarweise liegen, sind doppelt-berührende Ebenen von F^3.

102. Wir unterscheiden drei Arten von geradlinigen Flächen dritter Ordnung. Nämlich eine der auf F^3 liegenden Curven k^2 II. Ordnung kann den Punkt, in welcher ihre Ebene die Axe u der doppelt berührenden Ebenen schneidet, entweder einschliessen, oder ausschliessen, oder sie kann durch denselben gehen; und ganz ebenso verhält sich dann jede andere k^2 der Fläche. In dem ersten Falle liegen (wie aus der ersten Erzeugungsart Nr. 97 sich ergiebt) in jeder Ebene von u zwei Strahlen der Regelschaar III. Ordnung, und zugleich schneiden sich in jedem Punkte von d zwei Strahlen derselben. In dem zweiten Falle trennen die beiden sogenannten Cuspidal-Ebenen der Fläche, welche durch u gehen und die Curve k^2 II. Ordnung berühren, die eigentlichen doppelt berührenden Ebenen und die eigentlichen Doppelpunkte der Fläche von den „isolirten", welche gleich jenen durch u gehen resp. auf d liegen. Der dritte Fall endlich ist als Grenzfall der beiden ersteren aufzufassen; wenn er eintritt, so fallen die beiden Leitlinien u und d (und damit zugleich die beiden Cuspidalebenen) zusammen.

103. An zwei windschiefen Geraden u, d und einer Curve II. Ordnung, welche von d geschnitten wird, aber weder mit d noch mit u in einer Ebene liegt, gleitet eine Gerade hin; dieselbe beschreibt alsdann eine geradlinige Fläche III. Ordnung (Nr. 97), deren Doppelpunkte auf d liegen und deren doppelt berührenden Ebenen durch u gehen. — Wie lautet der reciproke Satz?

Involutorische Elementargebilde.

104. Wird auf einer Tangente eines Kegelschnittes eine involutorische Punktreihe angenommen, und zieht man aus je zwei zugeordneten Punkten derselben zwei neue Tangenten an die Curve, so schneiden sich diese auf einer bestimmten Geraden (Seite 119). Insbesondere folgt:

105. Die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, die einer Parabel umschrieben werden können, liegen auf einer Geraden; ebenso die Spitzen aller umschriebenen gleichschenkligen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente der Parabel liegen.

106. Die Spitzen aller einem Kegelschnitt umschriebenen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente liegen und durch den Berührungspunkt A derselben halbirt werden, liegen (nach Nr. 104) in einer Geraden, nämlich in dem durch A gehenden Durchmesser der Curve. Die Geraden, welche in jedem Dreiecke die Berührungspunkte der übrigen beiden Seiten verbinden, sind zur Grundlinie parallel.

107. Drehen sich zwei Ebenen um zwei feste Gerade u, u_1 so, dass sie fortwährend zu irgend zwei conjugirten Durchmessern eines gegebenen Kegelschnittes parallel laufen, so beschreibt ihre Schnittlinie eine durch u und u_1 gehende Kegel- oder Regelfläche II. Ordnung.

108. Zwei projectivische Strahlen- oder Ebenenbüschel I. Ordnung sollen in involutorische Lage gebracht werden (vergl. Nr. 15).

109. Von einem involutorischen geraden Gebilde sind zwei Punktenpaare A, A_1 und B, B_1 gegeben; man construire mittelst des vollständigen Vierecks zu irgend einem fünften Punkte C den zugeordneten C_1 (Seite 125), und bestimme insbesondere den „Mittelpunkt“ der Punktreihe, dessen zugeordneter unendlich fern liegt.

110. Von einem Kegelschnitt sind zwei Paare conjugirter Durchmesser bekannt; man zeichne zu einem beliebigen fünften Durchmesser den conjugirten (Seite 119 und 124).

111. Zieht man durch irgend einen Punkt Parallele zu den drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, so erhält man drei Paar Strahlen einer Involution (Seite 124). Daraus folgt:

112. Wenn zwei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sich rechtwinklig schneiden, so sind auch die letzten beiden Gegenseiten auf einander normal (Seite 130). Oder: Die drei

Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem „Höhenpunkte“ des Dreiecks.

113. Alle Curven II. Ordnung, welche durch die Eckpunkte und den Höhenpunkt eines beliebigen Dreiecks gehen, sind gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen (Seite 125, vergl. Nr. 112). Einem beliebigen Viereck kann allemal eine gleichseitige Hyperbel umschrieben werden; dieselbe geht durch die Höhenpunkte der vier von den Eckpunkten gebildeten Dreiecke.

114. Die Seiten eines beliebigen Dreiecks bilden mit der unendlich fernen Geraden der Ebene ein vollständiges Vierseit, dessen drei Paar Gegenpunkte aus dem Höhenpunkt des Dreiecks durch drei Paare normaler Strahlen projicirt werden. Daraus folgt (vergl. Seite 124 und 126):

115. In dem Höhenpunkte jedes Tangentendreiecks einer Parabel schneiden sich zwei Tangenten dieser Curve rechtwinklig. Die Höhenpunkte aller Tangentendreiecke einer Parabel liegen folglich auf einer Geraden (Nr. 105). Insbesondere liegen die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche in einem beliebigen vollständigen Vierseit enthalten sind, auf einer Geraden.

116. Ist einer Ellipse oder Hyperbel ein Rechteck $ABCD$ umschrieben, so schneiden sich in jedem Punkte S, der mit den Eckpunkten A, B, C, D auf einem Kreise liegt, zwei Tangenten der Curve rechtwinklig (Seite 126); denn die zwei Paar gegenüberliegenden Eckpunkte des Rechtecks werden aus S durch zwei Paare rechtwinkliger Strahlen projicirt. Daraus schliessen wir: Die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, die einer Ellipse oder Hyperbel umschrieben werden können, liegen auf einem Kreise. — Dieser Satz kann als Specialfall des folgenden betrachtet werden.

117. Je zwei Tangenten einer Curve k II. Ordnung, welche durch zwei zugeordnete Punkte einer involutorischen Punktreihe u gehen, schneiden sich im Allgemeinen auf einer anderen Curve II. Ordnung.

Je zwei Punkte einer Curve II. Ordnung, durch welche zwei zugeordnete Strahlen eines involutorischen Büschels S gehen, liegen im Allgemeinen auf einem Strahle eines Büschels II. Ordnung.

Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Curve k von der Geraden u berührt wird (Nr. 104). Im Allgemeinen kann der Curve ein Vierseit $abcd$ umschrieben werden, von welchem zwei Gegenpunkte ac und bd mit zwei zugeordneten Punkten P, P_1 von u zusammen-

fallen. Wenn nun im Punkte S zwei Tangenten von k sich schneiden, welche durch zwei andere zugeordnete Punkte Q, Q_1 von u gehen, so bilden diese Tangenten $\overline{SQ}$, $\overline{SQ_1}$ mit den Strahlen $\overline{SP}$, $\overline{SP_1}$ und mit demjenigen dritten Strahlenpaare, durch welches zwei von P und P_1 verschiedene Gegenpunkte R, R_1 des Vierseits $abcd$ aus S projicirt werden, eine Involution (Seite 126), und es gehen folglich auch die Strahlen $\overline{SR}$ und $\overline{SR_1}$ durch zwei zugeordnete Punkte von u. Bezieht man also die Strahlenbüschel R und R_1 projectivisch so auf einander, dass je zwei homologe Strahlen derselben durch zwei zugeordnete Punkte von u gehen, so erzeugen sie eine Curve II. Ordnung, welcher der geometrische Ort des Punktes S ist. — Man kann auch sagen: „Die Tangentenpaare „einer Curve II. Ordnung, welche durch zwei gegebene Punkte „harmonisch getrennt sind, schneiden sich im Allgemeinen auf „einer Curve II. Ordnung.“ So ausgedrückt ist der Satz links ein Specialfall des folgenden, dessen Beweis wir unterdrücken:

Die Tangentenpaare einer Curve II. Ordnung, welche bezüglich einer zweiten Curve II. Ordnung conjugirt sind, schneiden sich im Allgemeinen in den Punkten einer dritten Curve II. Ordnung.

Die Punktenpaare einer Curve II. Ordnung, welche bezüglich einer zweiten Curve II. Ordnung conjugirt sind, liegen im Allgemeinen auf den Tangenten einer dritten Curve II. Ordnung.

Man findet leicht, dass die dritte Curve (links) durch die Berührungspunkte einer jeden gemeinschaftlichen Tangente der beiden ersteren geht.

118. Wenn von den drei Kreisen, welche die Diagonalen eines vollständigen Vierseits zu Durchmessern haben, irgend zwei sich schneiden, so geht auch der dritte durch die beiden Schnittpunkte. Die Schenkel jedes rechten Winkels, welcher einen dieser Schnittpunkte zum Scheitel hat, berühren eine dem Vierseit eingeschriebene Curve II. Ordnung.

119. Alle einem Kreisviereck umschriebenen Hyperbeln haben parallele Axen; die Richtungen dieser Axen halbiren die Winkel, welche je zwei Gegenseiten des Vierecks mit einander bilden. Die Ordnungsstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels, von welchen drei Paar zugeordnete Strahlen zu den drei Paar Gegenseiten des Kreisvierecks parallel laufen, stehen nämlich auf einander senkrecht.

120. Zieht man an eine Curve II. Ordnung durch den Halbirungspunkt M einer Sehne zwei Secanten, so bestimmen diese auf der Curve ein vollständiges Viereck; die übrigen zwei Paar Gegenseiten dieses Vierecks begrenzen auf der Sehne zwei Strecken, die ebenfalls in M halbirt werden.

Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung.

121. Von einer Parabel den Brennpunkt F zu construiren.

a. Der Brennpunkt F liegt auf jeder Normalen, welche man auf einer beliebigen Tangente in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtet (Seite 136).

b. Der Brennpunkt halbirt das Stück der Axe, welches zwischen zwei conjugirten und zu einander rechtwinkligen Geraden, z. B. zwischen der Tangente und der Normale eines Parabelpunktes, liegt (Seite 133).

c. Jede Parabeltangente bildet mit einem Durchmesser dieselben Winkel, wie mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes und des Brennpunktes F (Seite 133).

d. Alle den Tangentendreiecken der Parabel umschriebenen Kreise gehen durch den Brennpunkt F (Seite 138).

122. Von einer Parabel die Leitlinie (Directrix) f zu construiren.

a. Die Leitlinie ist die Polare des Brennpunktes.

b. Auf der Leitlinie f schneiden sich je zwei zu einander rechtwinklige Parabeltangenten (Seite 133).

c. Die Höhenpunkte aller Tangentendreiecke der Parabel liegen auf der Directrix f (Nr. 115).

123. Die Leitlinien aller Parabeln, welche einem Dreieck eingeschrieben werden können, gehen durch den Höhenpunkt desselben, und ihre Brennpunkte liegen auf dem, dem Dreieck umschriebenen Kreise. Fällt man aus irgend einem Punkte dieses Kreises Normalen auf die Dreiecksseiten, so liegen deren drei Fusspunkte in einer Geraden, nämlich in der Scheiteltangente von einer der eingeschriebenen Parabeln.

124. Von einer Ellipse oder Hyperbel die beiden Brennpunkte zu construiren:

a. als Ordnungspunkte einer in der Hauptaxe liegenden involutorischen Punktreihe (Seite 132).

b. Mittelst der Scheiteltangenten der Hauptaxe. Dieselben begrenzen auf jeder dritten Tangente eine Strecke, welche aus den Brennpunkten durch rechte Winkel projicirt wird (Seite 137).

c. Mittelst des Kreises, welcher die Curve in den Scheitelpunkten der Hauptaxe berührt. Errichtet man auf einer Tangente der Curve zwei Normalen in den Punkten, welche sie mit dem Kreise gemein hat, so schneiden diese die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten (Seite 136).

d. Indem man einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten einander conjugirt sind und dessen Hypotenuse in der Nebenaxe liegt, einen Kreis umschreibt. Derselbe schneidet die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten (Seite 132).

e. Mit Hülfe des Satzes, dass die Summe resp. Differenz der beiden Brennstrahlen eines Curvenpunktes constant ist (Seite 135).

125. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, der zugehörigen Directrix und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 134 und 135).

126. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte und entweder drei Tangenten oder zwei Tangenten und dem Berührungspunkte von einer derselben (Seite 137). In beiden Fällen sofort den zweiten Brennpunkt zu zeichnen (Seite 133).

127. Werden in der Ebene die Brennpunkte von jeder einem Dreieck ABC eingeschriebenen Curve II. Ordnung einander zugeordnet, so wird dadurch zwischen den Punkten der Ebene eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt, von welcher A, B, C die drei Hauptpunkte sind; d. h. wenn der eine Brennpunkt eine beliebige Gerade u beschreibt, so beschreibt der andere eine durch A, B, C gehende und zu u projectivische Curve II. Ordnung (Seite 133). Die Halbirungslinien der Dreieckswinkel sind sich selbst zugeordnet. Jede Gerade der Ebene ist Axe von einer der eingeschriebenen Curven II. Ordnung.

128. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus den beiden Brennpunkten und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 135 und 136).

129. Die Winkel, welche confocalen Curven II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte P ihre Ebene umschrieben werden können, werden von zwei bestimmten Geraden halbirt, die sich in P rechtwinklig schneiden (Seite 133), nämlich von den Tangenten der beiden durch P gehenden Curven.

130. Die Pole einer Geraden g in Bezug auf confocale Curven II. Ordnung liegen in einer zu g normalen Geraden; dieselbe ist von g durch die beiden Brennpunkte harmonisch getrennt.

131. Je zwei Gegenseiten eines Vierecks, welches aus einem Poldreieck einer Curve II. Ordnung und dessen Höhenpunkt besteht, sind durch die Brennpunkte der Curve harmonisch getrennt.

132. Sind von einer Curve II. Ordnung zwei Punkte A, B und ein Brennpunkt F gegeben, so liegt der andere Brennpunkt F_1 auf einem der beiden durch F gehenden Kegelschnitte, von welchen A und B die Brennpunkte sind. Denn weil $AF \mp BF$ gegeben ist, so muss $AF_1 \mp BF_1$ eine constante Grösse sein (vgl. Seite 135). — Die zu F gehörige Directrix schneidet die Gerade $\overline{AB}$ in einem der beiden Punkte, durch welche die Halbirungslinien der von $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ gebildeten Winkel gehen (Seite 134).

133. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, dem Mittelpunkte und einem Punkte oder einer Tangente (Nr. 128).

134. Das Product der Abstände eines Brennpunktes von zwei parallelen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel ist constant (Seite 136); ebenso das Product der Abstände beider Brennpunkte von einer beliebigen Tangente.

135. Eine Ellipse zu zeichnen, deren Axenlängen gegeben sind:

a. auf Grund des Satzes Nr. 59;
b. mit Benutzung der vier Scheiteltangenten (Nr. 20 und 21);
c. mit Hülfe der Brennpunkte, die aus den Axenlängen zu construiren sind.

136. Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben sind der Brennpunkt und die Directrix (Seite 135), oder der Brennpunkt, die Axe und ein Punkt oder eine Tangente.

137. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren, liegen auf zwei confocalen Curven II. Ordnung (vgl. Seite 135). Die Mittelpunkte der gegebenen beiden Kreise sind die Brennpunkte dieser Curven.

138. Alle Punkte der Ebene, die von einer Geraden und einem Kreise gleichen Abstand haben, liegen auf zwei Parabeln (vgl. Nr. 137).

139. Wenn der eine Schenkel eines Winkels von gegebener Grösse eine Curve II. Ordnung beständig berührt, indess der andere sich um einen ihrer Brennpunkte dreht, so beschreibt der Scheitel-

punkt einen Kreis, welcher die Curve zweimal berührt (Seite 136); wenn aber die Curve eine Parabel ist, so beschreibt der Scheitelpunkt eine Tangente derselben.

Aufgaben zweiten Grades.

140. Einer Curve II. Ordnung soll ein einfaches $n$eck eingeschrieben werden, dessen Seiten der Reihe nach durch n gegebene, nicht auf der Curve liegende Punkte gehen.

141. Einer Curve II. Ordnung soll ein einfaches $n$eck umschrieben werden, dessen Eckpunkte der Reihe nach auf n gegebenen, die Curve nicht berührenden Geraden liegen.

142. In der Ebene ist ein einfaches Fünfeck gegeben; es soll ein zweites gezeichnet werden, welches dem gegebenen um- und zugleich eingeschrieben ist.

143. Durch einen gegebenen Punkt sind zwei Strahlen so zu ziehen, dass sie auf zwei gegebenen Geraden u, v zwei Strecken von gegebenen Längen begrenzen.

144. Zwischen den Geraden u, v soll eine Linie so gezogen werden, dass sie von zwei gegebenen Punkten aus unter rechten Winkeln gesehen wird.

145. Auf einer gegebenen Geraden eine Strecke zu bestimmen, welche aus zwei gegebenen Punkten unter gegebenen Winkeln gesehen wird.

146. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu legen, dass sie ein gegebenes Dreieck halbirt, oder dass sie mit zwei gegebenen Geraden ein Dreieck von gegebenem Inhalt bildet.

147. Einem Dreieck soll ein anderes umschrieben werden, dessen eine Seite von zwei gegebenen Geraden begrenzt wird und dessen anderen beiden Seiten einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen.

148. Die Schenkel der einander entsprechenden rechten Winkel von zwei projectivischen Strahlenbüscheln zu construiren (Nr. 15).

149. Man bestimme in zwei projectivischen Punktreihen, die in derselben Geraden liegen, zwei homologe Punkte, die einen gegebenen Abstand haben, oder in zwei concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln zwei homologe Strahlen, die einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen.

150. In zwei projectivischen geraden Gebilden bestimme man zwei homologe Strecken von gegebenen Längen.

151. Eine Curve II. Ordnung hat im Allgemeinen ein Paar conjugirter Durchmesser, welche mit einem Paar conjugirter Durchmesser einer anderen in derselben Ebene liegenden Curve II. Ordnung parallel laufen. Nur Hyperbeln, deren Asymptotenrichtungen durch einander getrennt sind, machen eine Ausnahme (Seite 146).

152. Einem Viereck eine Curve II. Ordnung zu umschreiben, welche eine gegebene Gerade berührt (Seite 126); oder einem Vierseit eine Curve II. Ordnung einzuschreiben, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

153. In der Ebene von zwei Curven II. Ordnung giebt es mindestens einen reellen Punkt U, welcher in Bezug auf beide Curven eine und dieselbe Polare u hat (Nr. 61). Die beiden reellen oder conjugirt-imaginären Punkte von u, welche in Bezug auf jede der beiden Curven conjugirt sind (vgl. Seite 146), bilden mit U ein gemeinschaftliches Poldreieck der Curven. Zwei in einer Ebene liegende Curven II. Ordnung haben demnach im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Poldreieck; dasselbe hat mindestens einen reellen Eckpunkt und eine reelle Seite.

Focalaxen und cyclische Ebenen von Kegelflächen II. Ordnung.

154. Dreht sich ein gegebener Flächenwinkel um seine Scheitellinie s, so umhüllt die Verbindungsebene der beiden Geraden, in welchen seine Flächen von zwei durch einen Punkt von s gelegten Ebenen beziehungsweise geschnitten werden, eine diese beiden Ebenen berührende Kegelfläche II. Ordnung, von welcher s eine Focalaxe ist (Seite 156). — Wie lautet der reciproke Satz?

155. Aus den reellen Focalaxen f, f' einer Kegelfläche II. Ordnung wird der ebene Winkel, welcher von den zu $\overline{ff'}$ normalen Berührungsebenen in einer beliebigen Berührungsebene begrenzt wird, durch zwei rechte Flächenwinkel projicirt.

156. Die reellen cyclischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ einer Kegelfläche II. Ordnung schneiden jeden Flächenwinkel, dessen Schenkel die beiden zu $\overline{\varkappa\varkappa'}$ normalen Strahlen der Kegelfläche mit einem beliebigen Strahle derselben verbinden, in zwei rechten Winkeln.

157. Zwei confocale Kegelflächen II. Ordnung schneiden sich in jedem Strahle, den sie mit einander gemein haben, rechtwinklig (Seite 155).

158. Zwei „concyclische" Kegelflächen II. Ordnung werden von jeder gemeinschaftlichen Berührungsebene in zwei zu einander normalen Strahlen berührt (Nr. 157; vgl. Seite 158).

159. Alle Flächenwinkel, welche confocalen Kegelflächen II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte P umschrieben werden können, werden von zwei bestimmten Ebenen halbirt, die sich in P rechtwinklig schneiden (Nr. 129).

160. Alle Winkel, welche concyclischen Kegelflächen II. Ordnung in einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene eingeschrieben werden können, werden von zwei bestimmten, zu einander normalen Strahlen halbirt (Nr. 159).

161. Eine Kegelfläche II. Ordnung und eine mit ihr concentrische Kugelfläche haben einen „sphärischen Kegelschnitt" mit einander gemein. Die Kugelfläche schneidet jede Symmetrie-Ebene der Kegelfläche in einer „Axe" des sphärischen Kegelschnittes, jede cyclische Ebene in einer „cyclischen Linie", jede Berührungsebene in einer „Tangente", jede Hauptaxe in zwei „Mittelpunkten" und jede Focalaxe der Kegelfläche in zwei „Brennpunkten" des sphärischen Kegelschnittes.

162. Der sphärische Kegelschnitt ist eine Zwillingscurve, d. h. er besteht aus zwei getrennten Linien, deren Punkte einander paarweise diametral auf der Kugelfläche gegenüberliegen. Im Allgemeinen hat er drei Paar Mittelpunkte, in denen sich seine drei Axen rechtwinklig schneiden, ferner zwei reelle cyclische Linien und zwei Paar reelle Brennpunkte. Durch diese Brennpunkte und durch die Schnittpunkte der beiden cyclischen Linien geht die erste Axe; die zweite Axe liegt ganz ausserhalb des Kegelschnittes; die dritte Axe schneidet die reellen cyclischen Linien rechtwinklig und hat ebenso wie die erste mit dem sphärischen Kegelschnitt zwei Paar reelle „Scheitelpunkte" gemein (Seite 155 und 160). In einem besonderen Falle besteht der sphärische Kegelschnitt aus zwei Kugelkreisen.

163. Alle Eigenschaften der Kegelfläche II. Ordnung, welche sich auf ihre Symmetrie-Ebenen, Hauptaxen, Focalaxen und cyclischen Ebenen beziehen, sollen auf den sphärischen Kegelschnitt übertragen werden.

164. Bewegt sich eine Seite eines sphärischen Dreiecks so, dass die Fläche desselben constant bleibt, so umhüllt sie einen sphärischen Kegelschnitt, von welchem die anderen beiden Dreiecks-Seiten die cyclischen Linien sind. Bewegt sich ein Eckpunkt eines sphärischen Dreiecks so auf der Kugelfläche, dass der Umfang des Dreiecks constant bleibt, so beschreibt er einen sphärischen Kegelschnitt, welcher die anderen beiden Eckpunkte zu Brennpunkten hat (Seite 156).

Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten.

165. Ein vollständiges Viereck nenne ich „Polviereck" eines Kegelschnittes γ^2, wenn von seinen sechs Seiten jede ihrer Gegenseite conjugirt ist in Bezug auf γ^2. Ebenso soll ein vollständiges Vierseit ein „Polvierseit" des Kegelschnittes heissen, wenn jeder von seinen sechs Eckpunkten dem ihm gegenüber liegenden Eckpunkte conjugirt ist. Die Polaren der Eckpunkte eines Polvierecks bilden ein Polvierseit; und zwar gehen die sechs Seiten des Vierecks durch die sechs Eckpunkte dieses Vierseits.

166. Wenn zwei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks aus conjugirten Strahlen bestehen, so gilt das Gleiche von dem dritten Paare, und das Viereck ist ein Polviereck des Kegelschnittes γ^2. Nämlich die Polare eines beliebigen Eckpunktes schneidet das Viereck in einer Involution von Punkten (Seite 124); und zwar jene beiden (und folglich alle drei) Paare von Gegenseiten in Paaren conjugirter Punkte; woraus der Satz folgt. Aehnlich beweist man den reciproken Satz: Ein vollständiges Vierseit ist ein Polvierseit von γ^2, wenn zwei Paare seiner Gegenpunkte aus conjugirten Punkten bestehen.

167. Verbindet man die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks mit den Polen der ihnen gegenüberliegenden Seiten, so gehen die drei Verbindungslinien durch einen Punkt D, welcher mit A, B und C ein Polviereck des Kegelschnittes γ^2 bildet (Nr. 166). Drei beliebig angenommene Eckpunkte A, B, C eines Polvierecks bestimmen also den vierten D; sind insbesondere A und B conjugirt in Bezug auf γ^2, so bilden sie mit D ein Poldreieck von γ^2. Jedes Viereck, welches aus einem Poldreieck von γ^2 und einem beliebigen Punkte der Ebene besteht, ist ein Polviereck von γ^2 (Nr. 165).

Es giebt auch uneigentliche Polvierecke, von deren Eckpunkten drei in einer Geraden liegen oder zwei sich vereinigen.

168. Bringt man die Seiten a, b, c eines Dreiecks zum Durchschnitt mit den Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man drei Punkte einer Graden d, welche mit a, b und c ein Polvierseit des Kegelschnittes γ^2 bildet (Nr. 166). Drei Seiten eines Polvierseits bestimmen also die vierte; nur wenn sie ein Poldreieck von γ^2 bilden, kann die vierte Seite mit jeder Geraden der Ebene zusammenfallen.

169. Wenn zwei Polvierecke $ABCD$ und $ABC'D'$ von γ^2 zwei Eckpunkte A und B mit einander gemein haben, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einer Curve II. Ordnung, die unter Umständen in zwei Gerade, $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, zerfallen kann.

Wenn zwei Polvierseite von γ^2 zwei gemeinschaftliche Seiten haben, so berühren ihre sechs Seiten eine „Curve II. Classe“ (d. h. sie gehören einem Strahlenbüschel II. Ordnung an), die auch in zwei Punkte zerfallen kann.

Weil nämlich die Strahlenbüschel A und B projectivisch auf einander bezogen werden, wenn man jedem Strahle von A den ihm conjugirten Strahl von B zuweist, so ergiebt sich $A(CDC'D') \barwedge B(DCD'C')$, und daraus (nach S. 122) $A(CDC'D') \barwedge B(CDC'D')$, wie im Satze links behauptet wird.

170. Da ein Poldreieck von γ^2 durch jeden Punkt der Ebene zu einem Polviereck ergänzt wird, so ergeben sich aus dem vorhergehenden Doppelsatze sofort die folgenden Sätze:

Wenn ein Poldreieck und ein Polviereck von γ^2 einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einer Curve II. Ordnung.

Wenn ein Poldreiseit und ein Polvierseit von γ^2 eine gemeinschaftliche Seite haben, so berühren ihre sechs Seiten eine Curve II. Classe.

Zwei beliebigen Poldreiecken eines Kegelschnittes γ^2 kann allemal eine Curve II. Ordnung umschrieben und eine Curve II. Classe eingeschrieben werden (vergl. auch S. 122). Diese Curven können aber auch in zwei Gerade resp. zwei Punkte zerfallen.

171. Zwei Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2, die in derselben Ebene liegen, haben unendlich viele gemeinschaftliche Polvierecke und Polvierseite. Man kann zwei Seiten a, b eines solchen gemeinschaftlichen Polvierecks willkürlich annehmen; die ihnen gegenüberliegenden Seiten a_1, b_1 verbinden die beiden Pole von a resp. b in Bezug auf γ^2 und γ_1^2.

Wenn zwei gemeinschaftliche Polvierecke $ABCD$ und $AB'C'D'$ von γ^2 und γ_1^2 einen Eckpunkt A mit einander gemein haben, so liegen ihre sieben Eckpunkte auf einer Curve II. Ordnung.

Wenn zwei gemeinschaftliche Polvierseite von γ^2 und γ_1^2 eine Seite mit einander gemein haben, so berühren ihre sieben Seiten eine Curve II. Classe.

Ist nämlich $ABB'P$ ein Polviereck von γ^2 und $ABB'Q$ ein solches von γ_1^2, so haben die Curven II. Ordnung $(ABCDB'P)$ und $(ABCDB'Q)$ fünf gemeinschaftliche Punkte und fallen deshalb zusammen mit dem Kegelschnitt $(ABB'PQ)$; ebenso aber fallen die Curven II. Ordnung $(AB'C'D'BP)$ und $(AB'C'D'BQ)$ mit $(ABB'PQ)$ zusammen.

172. In Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte $\gamma^2, \gamma_1^2, \gamma_2^2$ der Ebene hat eine Gerade a drei Pole, die im Allgemeinen nicht in einer Geraden liegen. Beschreibt a einen Strahlenbüschel U, so beschreiben diese Pole drei zu U und deshalb auch zu einander projectivische Punktreihen u, u_1, u_2; und von den Strahlen, welche die homologen Punkte von u und u_1 verbinden, gehen im Allgemeinen höchstens drei (mindestens aber einer) durch die entsprechenden Punkte von u_2 (S. 108), und sind je einem Strahle von U in Bezug auf die drei Kegelschnitte γ^2, γ_1^2, γ_2^2 conjugirt. Daraus ergiebt sich die eine Hälfte des Doppelsatzes:

Es giebt in der Ebene unendlich viele Paare von Strahlen, die in Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte conjugirt sind. Diese Strahlenpaare umhüllen im Allgemeinen eine Curve III. Classe, und je zwei von ihnen bilden zwei Paar Gegenseiten eines gemeinschaftlichen Polvierecks der drei Kegelschnitte (Nr. 166). Drei Tangenten, welche von irgend einem Punkte U an die Curve III. Classe gehen, bilden mit den ihnen conjugirten Tangenten die drei Paar Gegenseiten eines gemeinschaftlichen Polvierecks der drei Kegelschnitte.

Es giebt in der Ebene unendlich viele Paare von Punkten, die in Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte conjugirt sind. Der Ort dieser Punktenpaare ist im Allgemeinen eine Curve III. Ordnung, und je zwei von ihnen bilden zwei Paar Gegenpunkte eines gemeinschaftlichen Polvierseits der drei Kegelschnitte. Drei Punkte, in welchen irgend eine Gerade die Curve III. Ordnung schneidet, bilden mit den ihnen conjugirten Curvenpunkten die drei Paar Gegenpunkte eines gemeinschaftlichen Polvierseits der drei Kegelschnitte.

Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten.

173. Wenn einem Polviereck eines Kegelschnittes γ^2 ein Kegelschnitt k^2 umschrieben ist, so stehen die beiden Curven γ^2 und k^2 in folgenden merkwürdigen Beziehungen zu einander:

a. Drei beliebige Punkte von k^2 bestimmen ein Polviereck von γ^2 (Nr. 167), dessen vierter Eckpunkt gleichfalls auf k^2 liegt.

b. Bringt man k^2 zum Durchschnitt mit zwei Geraden, die in Bezug auf γ^2 conjugirt sind, so erhält man die vier Eckpunkte eines Polvierecks von γ^2.

c. Der Curve k^2 können demnach unendlich viele Polvierecke, im Allgemeinen aber auch unendlich viele reelle Poldreiecke von γ^2 eingeschrieben werden; jeder von γ^2 eingeschlossene Punkt der Curve k^2 ist Eckpunkt von einem dieser Poldreiecke.

d. Die Polare eines Punktes von k^2 bezüglich der γ^2 schneidet die eine oder auch jede der beiden Curven in zwei reellen Punkten, welche in Bezug auf die andere Curve conjugirt sind.

e. Zwei Tangenten von γ^2, deren Berührungspunkte conjugirt sind in Bezug auf k^2, schneiden sich allemal in einem Punkte von k^2.

a_1. Drei beliebige Tangenten von γ^2 bestimmen ein Polvierseit von k^2, dessen vierte Seite gleichfalls Tangente von k^2 ist.

b_1. Zieht man an γ^2 Tangenten aus zwei Punkten, die in Bezug auf k^2 conjugirt sind, so erhält man die vier Seiten eines Polvierseits von k^2.

c_1. Der Curve γ^2 können demnach unendlich viele Polvierseite, im Allgemeinen aber auch unendlich viele Poldreiseite von k^2 umschrieben werden; jede von k^2 ausgeschlossene Tangente der γ^2 ist Seite von einem dieser Poldreiseite.

d_1. Aus dem Pole einer Tangente von γ^2 bezüglich der k^2 gehen an die eine oder auch an jede der beiden Curven zwei reelle Tangenten, welche in Bezug auf die andere Curve conjugirt sind.

e_1. Zwei Punkte von k^2, deren Tangenten conjugirt sind in Bezug auf γ^2, liegen allemal auf einer Tangente von γ^2.

f. und f_1. Die Curve k^2 liegt entweder ganz ausserhalb γ^2 oder theils ausserhalb, theils innerhalb; sie kann nicht von γ^2 eingeschlossen sein.

174. Zum Beweise dieser Sätze diene Folgendes. Zwei Eckpunkte des Polvierecks von γ^2, welchem der Kegelschnitt k^2 umschrieben ist, bestimmen mit einem beliebigen dritten Punkte A

von k^2 ein zweites, der k^2 eingeschriebenes Polviereck von γ^2 (Nr. 167 und 169); aus diesem zweiten aber kann ebenso ein drittes abgeleitet werden, von welchem zwei Eckpunkte A, B beliebig auf k^2 angenommen sind, und dieses dritte führt zu einem vierten, der k^2 eingeschriebenen Polviereck von γ^2, welches drei beliebige Punkte A, B, C von k^2 zu Eckpunkten hat. Damit ist der Satz a. bewiesen, woraus b. ohne Weiteres folgt. — Sei a die Polare von A in Bezug auf γ^2, und möge dieselbe mit γ^2 keinen reellen Punkt gemein haben, also A innerhalb γ^2 liegen; dann schneidet a die Gegenseiten der Polvierecke von γ^2, welche A zum Eckpunkt haben, in Paaren von Punkten, die hinsichtlich γ^2 conjugirt sind (Nr. 166), und die so entstehende involutorische Punktreihe a hat keine reellen Ordnungspunkte. Die sämmtlichen Kegelschnitte, welche einem beliebigen jener Polvierecke umschrieben werden können, müssen deshalb die Gerade a in je zwei reellen, conjugirten Punkten schneiden, welche mit A ein reelles Poldreieck von γ^2 bilden; denn diese Kegelschnitte folgen stetig auf einander, unendlich viele von ihnen haben mit der involutorischen Punktreihe a zwei reelle, einander zugeordnete Punkte gemein (S. 125), und unmöglich kann einer derselben mit a zwei imaginäre Punkte gemein haben, weil sonst zwischen ihm und den eben genannten ein anderer liegen würde, welcher a in einem reellen Ordnungspunkte berührte. Damit sind die Sätze c. und f. bewiesen, woraus d. und e. sich leicht ergeben.

175. Die Sätze a_1. bis f_1. der Nr. 173 können auf dieselbe Art wie a. bis f. bewiesen werden, sobald gezeigt ist, dass dem Kegelschnitt γ^2 irgend ein Polvierseit von k^2 umschrieben werden kann. Um diesen Nachweis zu liefern, nehmen wir auf k^2 drei Punkte P, Q, R an, deren Verbindungslinien ausserhalb γ^2 liegen, was (Nr. 173 *f.*) allemal möglich ist. Dieselben bestimmen ein der k^2 eingeschriebenes Polviereck $PQRS$ von γ^2, dessen Gegenseiten sich in drei ausserhalb γ^2 liegenden Punkten U, V, W schneiden; diese drei Punkte sind paarweise conjugirt in Bezug auf k^2, und zwei von ihnen, U und V, liegen ausserhalb k^2. Zieht man nun von U und V Tangentenpaare an γ^2, so trennen dieselben je zwei Gegenseiten des Polvierecks $PQRS$ harmonisch (Seite 83); diese vier Tangenten bilden folglich ein Vierseit, dessen Gegenpunkte paarweise durch jedes Paar Gegenseiten des Vierecks $PQRS$ harmonisch getrennt sind, und da einer der sechs Eckpunkte des Vierseits, wie man leicht einsieht,

von k^2 eingeschlossen ist, so ist derselbe auch durch k^2 von seinem Gegenpunkte harmonisch getrennt (Seite 125). Von den Gegenpunkten des Vierseits sind also zwei Paare conjugirt hinsichtlich k^2, dieses der γ^2 umschriebene Vierseit ist folglich ein Polvierseit von k^2; w. z. b. w.

176. Von zwei Kegelschnitten k^2 und γ^2, von welchen der eine k^2 einem Polviereck des anderen γ^2 umschrieben oder dieser einem Polvierseit von jenem eingeschrieben ist, sage ich*): „Die Curve II. Ordnung k^2 stützt oder trägt die Curve II. Classe γ^2, und umgekehrt γ^2 stützt sich oder ruht auf k^2.“ Wenn k^2 in zwei Strahlen oder γ^2 in zwei Punkte zerfällt, so sage ich demgemäss:

Ein Strahlenpaar stützt die Curve II. Classe γ^2, wenn seine Strahlen in Bezug auf γ^2 conjugirt sind.

Ein Punktenpaar ruht auf der Curve II. Ordnung k^2, wenn seine Punkte in Bezug auf k^2 conjugirt sind.

Und weil eine Gerade nur dann in Bezug auf γ^2 sich selbst conjugirt ist, wenn sie γ^2 berührt, so setze ich hinzu:

Eine zweifache Gerade stützt die Curve II. Classe γ^2, wenn sie γ^2 berührt.

Ein zweifacher Punkt ruht auf der Curve II. Ordnung k^2, wenn er auf k^2 liegt.

177. Alle Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve II. Classe γ^2 stützen und durch drei willkürlich angenommene Punkte gehen, sind dem, durch diese Punkte bestimmten Polviereck von γ^2 umschrieben (Nr. 173 a); durch einen beliebig angenommenen vierten Punkt der Ebene geht demnach nur einer derselben. Also:

Die sämmtlichen Kegelschnitte k^2, welche eine gegebene Curve II. Classe γ^2 stützen, bilden eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-System vierter Stufe“ nennen wollen. Einem beliebigen Viereck kann im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt dieses Systemes umschrieben

Die sämmtlichen Kegelschnitte γ^2, welche auf einer gegebenen Curve II. Ordnung k^2 ruhen, bilden eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe“ nennen wollen. Einem beliebigen Vierseit kann im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt dieses Gewebes einge-

*) Vergl. meine analytisch-geometrischen Arbeiten in Crelle-Borchardt's Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 82.

werden; denn das Viereck ist ein Polviereck von γ^2, und alle ihm umschriebenen Kegelschnitte gehören zu dem Systeme, wenn irgend zwei derselben die Curve γ^2 stützen.

schrieben werden; denn das Vierseit ist ein Polvierseit von k^2 und alle ihm eingeschriebenen Kegelschnitte gehören zu dem Gewebe, wenn irgend zwei derselben auf der Curve k^2 ruhen.

178. Von den Kegelschnitten, welche zwei gegebene Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 stützen, geht durch drei beliebige Punkte A, B, C der Ebene im Allgemeinen ein einziger; derselbe enthält auch die beiden Punkte, welche mit A, B und C ein Polviereck von γ^2 und eines von γ_1^2 bilden. Ueberhaupt können wir sagen:

Alle Kegelschnitte k^2, welche zwei, drei oder vier beliebig in der Ebene angenommene Curven II. Classe stützen, bilden eine drei-, zwei-, resp. einfach unendliche Mannigfaltigkeit, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-System dritter, zweiter, resp. erster Stufe“ nennen wollen.

Alle Kegelschnitte γ^2, welche auf zwei, drei oder vier beliebig in der Ebene angenommene Curven II. Ordnung zugleich sich stützen, bilden eine drei-, zwei-, resp. einfach unendliche Mannigfaltigkeit, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter, zweiter, resp. erster Stufe“ nennen wollen.

Bei besonderer gegenseitiger Lage der gegebenen Curven können diese Sätze Ausnahmen erleiden, die sich weiter unten von selbst ergeben. Die Stufenzahl giebt nicht blos an, wie viele Dimensionen ein Kegelschnitt-System oder -Gewebe hat, sondern sie ist, wie wir sehen werden (Nr. 189 und 195), zugleich die Zahl der Punkte resp. Tangenten, durch welche einer von seinen Kegelschnitten festgelegt ist.

179. Die linearen Kegelschnitt-Systeme erster und zweiter Stufe werden gewöhnlich „Kegelschnitt-Büschel“ resp. „Kegelschnitt-Netze“ genannt; ebenso führen die reciproken Gebilde auch die Namen „Schaar“ resp. „Schaarschaar von Kegelschnitten“. Allerdings pflegt man sonst den Kegelschnittbüschel und die Kegelschnittschaar zu definiren als die Gesammtheit aller Kegelschnitte, die einem Viereck umschrieben resp. einem Vierseit eingeschrieben werden können; aber diese Definitionen sind in den obigen enthalten, wie der folgende Satz lehrt:

Wenn zwei Kegelschnitte eines linearen Kegelschnitt-Systemes einem Viereck umschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polviereck aller Curven II. Classe, die auf das System sich stützen (Nr. 177), und dem Systeme gehören folglich alle dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte an.

Wenn zwei Kegelschnite eines linearen Kegelschnitt-Gewebes einem Vierseit eingeschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polvierseit aller Curven II. Ordnung, welche das Gewebe stützen (Nr. 177), und dem Gewebe gehören folglich alle dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte an.

180. Die Theorie des linearen Kegelschnitt-Systemes vierter Stufe ist nicht wesentlich verschieden von der Polarentheorie der Curve II. Classe γ^2, welche auf allen seinen Kegelschnitten ruht. Wir heben deshalb nur hervor, dass das System ein specielles ist, wenn γ^2 sich auf zwei Punkte P, Q oder auch auf einen zweifachen Punkt P reducirt. Also:

Alle Kegelschnitte der Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen oder in Bezug auf welche zwei Punkte P, Q einander conjugirt sind, bilden ein specielles lineares Kegelschnitt-System vierter Stufe.

Alle Kegelschnitte der Ebene, welche eine gegebene Gerade berühren oder in Bezug auf welche zwei Gerade einander conjugirt sind, bilden ein specielles lineares Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe.

Z. B. alle Parabeln der Ebene bilden ein specielles Kegelschnitt-Gewebe und alle gleichseitigen Hyperbeln bilden ein specielles Kegelschnitt-System vierter Stufe. Auf welche beiden imaginären Punkte reducirt sich die Curve II. Classe γ^2, welche auf allen gleichseitigen Hyperbeln ruht?

Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter und erster Stufe.*)

181. Sind von einem Polviereck einer Curve II. Classe γ^2 zwei Eckpunkte A, B gegeben, sowie die zu $\overline{AB}$ conjugirte Seite u, in welcher die anderen beiden Eckpunkte C, D liegen, so bilden die letzteren irgend ein Paar zugeordneter Punkte einer involutorischen Punktreihe u. Man erhält diese Punktreihe, wenn man

*) Vergl. Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte, II. Aufl., S. 224—403 (Leipzig 1876).

jedem Strahle $\overline{AC}$ oder $\overline{AD}$ von A den ihm conjugirten Strahl $\overline{BD}$ resp. $\overline{BC}$ von B zuweist, und sodann die Strahlenbüschel A und B welche dadurch projectivisch auf einander bezogen sind, mit u zum Durchschnitt bringt. Will man nun ein gemeinschaftliches Polviereck von zwei Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 construiren, welches die Punkte A, B zu Eckpunkten hat, so muss die Gerade u, welche die anderen beiden Eckpunkte C und D enthält, durch die beiden Pole von $\overline{AB}$ in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 gehen; die Punkte C und D aber sind einander zugeordnet in zwei auf u liegenden involutorischen Punktreihen, und deshalb völlig bestimmt (Seite 146), wenn die Punktreihen nicht ausnahmsweise identisch sind. Die beiden Ordnungspunkte von jeder dieser involutorischen Punktreihen sind conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche dem Polviereck $ABCD$ umschrieben sind; und zwar geht, wie wir früher (Seite 150) bewiesen haben, auch dann durch einen beliebigen Punkt P allemal einer dieser Kegelschnitte, wenn C und D imaginär werden. Daraus schliessen wir (vergl. Nr. 178):

182. Alle Kegelschnitte, welche zwei Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 stützen und durch zwei reelle Punkte gehen, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 umschrieben, dessen übrigen beiden Eckpunkte aber auch conjugirt-imaginär sein können.

Alle Kegelschnitte, welche auf zwei Curven II. Ordnung k^2 und k_1^2 ruhen und zwei reelle Gerade berühren, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck von k^2 und k_1^2 eingeschrieben, dessen übrigen beiden Seiten aber auch conjugirt-imaginär sein können.

Wir dürfen (Seite 142) dieses Polviereck als gegeben betrachten, wenn ausser seinen beiden reellen Punkten A und B irgend ein ihm umschriebener Kegelschnitt bekannt ist, sowie die Gerade u, auf welcher die anderen beiden Eckpunkte liegen. Sind zwei ihm umschriebene Kegelschnitte gegeben, so projiciren wir alle Punkte des einen aus A sowohl wie aus B auf den anderen; wir erhalten dann in diesem letzteren zwei projectivische Punktreihen, welche die übrigen beiden Eckpunkte C, D des Polvierecks entsprechend gemein haben, und die Gerade u oder $\overline{CD}$ ergiebt sich, auch wenn C und D imaginär sind, durch eine bekannte Construction (Seite 139). Das Polviereck ist also auch durch zwei ihm umschriebene Kegelschnitte völlig bestimmt; alle ihm umschriebenen Kegelschnitte stützen sowohl γ^2 wie γ_1^2.

183. Auf Grund dieser Bemerkungen und der Sätze von Nr. 179 können wir nun folgenden wichtigen Satz beweisen, welcher die Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter Stufe mit denjenigen erster Stufe auf das Innigste verknüpft*):

Mit einem linearen Kegelschnittsysteme dritter Stufe ist allemal eine Kegelschnittschaar derartig verbunden, dass jede Curve der Schaar auf jeder Curve des Systemes ruht.	Mit einem linearen Kegelschnittgewebe dritter Stufe ist allemal ein Kegelschnittbüschel derartig verbunden, dass jede Curve des Büschels alle Curven des Gewebes stützt.

Es seien γ^2 und γ_1^2 die beiden Curven II. Classe, welche auf allen Kegelschnitten des linearen Systemes dritter Stufe ruhen und dasselbe bestimmen (Nr. 178). Wir wählen in dem Systeme vier Kegelschnitte k, l, m, n so, dass k, l und m durch einen beliebig gegebenen reellen Punkt P gehen und sich paarweise in drei verschiedenen gemeinschaftlichen Polvierecken (kl), (km), (lm) von γ^2 und γ_1^2 schneiden; der vierte Kegelschnitt n gehe nicht durch P, werde aber von k in einem gemeinschaftlichen Polviereck (kn) von γ^2 und γ_1^2 geschnitten, welches zwei oder vier reelle Eckpunkte hat. Wir bezeichnen endlich mit δ^2 irgend einen von γ^2 und γ_1^2 verschiedenen Kegelschnitt der Schaar, welche auf k, l, m, n sich stützt (Nr. 178 und 179). Wir beweisen dann den Satz links, indem wir darthun, dass auf jedem Kegelschnitte des linearen Systemes dritter Stufe, z. B. auf demjenigen, welcher durch irgend drei reelle Punkte A, B, C geht (Nr. 178), allemal ausser γ^2 und γ_1^2 auch die Curve δ^2 ruht.

184. Die Vierecke (kl), (km), (lm) und (kn) sind Polvierecke auch von δ^2, weil δ^2 auf jeden der vier Kegelschnitte k, l, m, n sich stützt; δ^2 ruht folglich auch auf denjenigen vier Kegelschnitten, welche jenen vier Polvierecken umschrieben sind und durch den beliebigen Punkt A gehen. Drei von diesen neuen Kegelschnitten sind dem durch P und A bestimmten gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 umschrieben (Nr. 182); der vierte geht nicht durch P, wenn, wie wir annehmen dürfen, A nicht auf k liegt, er schneidet also die drei ersteren in drei verschiedenen

*) Derselbe rührt von Herrn H. J. Stephen Smith her; vergl. die Abhandlung des Herrn Rosanes „Ueber Systeme von Kegelschnitten“ in den Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 264.

gemeinschaftlichen Polvierecken von γ^2, γ_1^2 und δ^2. Unter den vier Kegelschnitten, welche durch den Punkt B gehen und diesen drei Polvierecken sowie dem durch P und A bestimmten Polviereck von γ^2, γ_1^2 und δ^2 umschrieben sind, giebt es deshalb mindestens zwei verschiedene, die Curven γ^2, γ_1^2 und δ^2 stützende; sie schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2, von welchem A und B zwei reelle Eckpunkte sind und welches also auch von δ^2 ein Polviereck ist; und der durch den Punkt C gehende, diesem letzten Polviereck umschriebene Kegelschnitt stützt folglich auch die Curve δ^2. Damit ist der Satz (Nr. 183, links) bewiesen.

185. Zwei Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 der Ebene bestimmen also nicht blos ein lineares Kegelschnitt-System dritter Stufe, sondern auch eine, sie enthaltende Kegelschnittschaar, deren Curven auf allen Curven des Systemes ruhen.

Zwei Curven II. Ordnung k^2 und k_1^2 der Ebene bestimmen nicht blos ein lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter Stufe, sondern auch einen, sie enthaltenden Kegelschnittbüschel, auf dessen Curven alle Curven des Gewebes sich stützen.

Das System enthält unendlich viele Kegelschnitte, welche in Strahlenpaare zerfallen; eine beliebige Gerade s der Ebene bildet mit derjenigen Geraden s', welche die Pole von s in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 mit einander verbindet, ein solches Strahlenpaar s, s'. Dasselbe stützt alle Curven der Kegelschnittschaar, und seine Strahlen sind in Bezug auf jede dieser Curven conjugirt (Nr. 176). Daraus folgt:

Die Pole einer Geraden s in Bezug auf alle Curven der Kegelschnittschaar liegen auf einer Geraden s'; dieselbe bildet mit s ein Strahlenpaar des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe.

Die Polaren eines Punktes S in Bezug auf alle Curven des Kegelschnittbüschels gehen durch einen Punkt S'; derselbe bildet mit S ein Punktenpaar des zugehörigen Kegelschnitt-Gewebes dritter Stufe.

Insbesondere liegen auch die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schaar auf einer Geraden.

186. Ist s eine gemeinschaftliche Tangente von γ^2 und γ_1^2, so fällt sie mit s' zusammen, ist also eine zweifache Gerade des Systemes und sich selbst conjugirt in Bezug auf alle Curven der Schaar. Also:

Eine Gerade, welche irgend zwei Kegelschnitte der Schaar

Ein Punkt, durch welchen irgend zwei Kegelschnitte des

berührt, ist gemeinschaftliche Tangente von allen Curven der Schaar, und zweifache Gerade des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe. Alle einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar; das zugehörige System dritter Stufe enthält alle Kegelschnitte, von welchen das Vierseit ein Polvierseit ist (Nr. 179).

Büschels gehen, ist gemeinschaftlicher Punkt von allen Curven des Büschels, und zweifacher Punkt des zugehörigen Kegelschnittgewebes dritter Stufe. Alle einem Viereck umschriebenen Kegelschnitte bilden einen Kegelschnittbüschel; das zugehörige Gewebe dritter Stufe enthält alle Kegelschnitte, von welchen das Viereck ein Polviereck ist.

187. Wenn um einen Punkt A eine Gerade s sich dreht, so beschreiben ihre Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 zwei zu dem Büschel A projectivische Punktreihen a und a_1, und die Verbindungslinie s' dieser Pole beschreibt im Allgemeinen einen Strahlenbüschel II. Ordnung. Derselbe enthält alle Strahlen, welche bezüglich der Kegelschnittschaar den Strahlen von A conjugirt sind (Nr. 185); er enthält auch die Polaren a, a_1, ... von A bezüglich γ^2, γ_1^2 und jeder anderen Curve der Schaar. Diese Polaren nun kann man construiren, indem man von irgend zwei Strahlen g und h von A die Pole bezüglich jeder Curve der Schaar bestimmt und diese beiden Pole verbindet. Und da die Verbindungslinien, wie soeben gezeigt wurde, einem Strahlenbüschel II. Ordnung angehören, so ergiebt sich (vgl. Nr. 185):

Die Pole von zwei beliebigen Geraden g, h bezüglich der einzelnen Curven einer Kegelschnittschaar sind homologe Punkte von zwei projectivischen Punktreihen I. Ordnung g_1, h_1, und die Polaren eines Punktes A liegen im Allgemeinen in einem Strahlenbüschel II. Ordnung, dessen Strahlen denjenigen von A conjugirt sind bezüglich der Kegelschnittschaar.

Die Polaren von zwei beliebigen Punkten bezüglich der einzelnen Curven eines Kegelschnittbüschels sind homologe Strahlen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln I. Ordnung, und die Pole einer Geraden a liegen im Allgemeinen auf einer Curve II. Ordnung, deren Punkte denjenigen von a conjugirt sind bezüglich des Kegelschnittbüschels.

Auch die Mittelpunkte aller Curven eines Kegelschnittbüschels liegen demnach im Allgemeinen auf einer Curve II. Ordnung. — Auf Grund dieser Sätze können wir die Definition aufstellen:

Vier Kegelschnitte einer Schaar heissen „harmonisch", wenn die Pole einer jeden Geraden bezüglich derselben vier harmonische Punkte sind.

Vier Kegelschnitte eines Büschels heissen „harmonisch", wenn die Polaren eines jeden Punktes bezüglich derselben vier harmonische Strahlen sind.

Dadurch wird es möglich, die Schaaren und Büschel von Kegelschnitten auf einander und auf die Elementargebilde projectivisch zu beziehen.

188. Durch einen Punkt A gehen im Allgemeinen zwei Strahlen, welche in Bezug auf die Kegelschnittschaar conjugirt sind (Nr. 187). Daraus ergiebt sich:

Die Tangentenpaare, welche aus einem beliebigen Punkte A an die Curven einer Kegelschnittschaar gezogen werden können, sind Paare von zugeordneten Strahlen eines involutorischen Büschels A. Die beiden Ordnungsstrahlen dieses Büschels sind conjugirt bezüglich der Kegelschnittschaar, und berühren in A je eine Curve der Schaar.

Die Punktenpaare, in welchen eine beliebige Gerade a die Curven eines Kegelschnittbüschels schneidet, sind Paare von zugeordneten Punkten einer involutorischen Punktreihe a. Die beiden Ordnungspunkte dieser Punktreihe sind conjugirt bezüglich des Kegelschnittbüschels, und in ihnen berührt a zwei Curven des Büschels.

189. Die Kegelschnittschaar ist bestimmt durch vier beliebige Kegelschnitte des linearen Systemes dritter Stufe, auf welchem sie ruht (Nr. 178, 183), insbesondere auch durch vier Strahlenpaare desselben. Wählt man diese Strahlenpaare so, dass ihre vier Schnittpunkte auf irgend einer Geraden l liegen, so ergiebt sich sofort, dass l von einer einzigen Curve der Schaar berührt wird; dieselbe muss nämlich auch die vier Geraden berühren, welche von l durch die vier Strahlenpaare harmonisch getrennt sind (Nr. 176). Sind zwei Curven γ^2, γ_1^2 der Schaar gegeben, so kann man an diese dritte Curve leicht aus jedem Punkte A von l eine zweite Tangente ziehen auf Grund des letzten Satzes (Nr. 188). Also:

Eine beliebige Gerade der Ebene wird von nur einer Curve der Kegelschnittschaar berührt; durch einen beliebigen Punkt aber können (Nr. 188) zwei dieser Curven gehen.

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene geht nur eine Curve des Kegelschnittbüschels; eine beliebige Gerade aber kann von zwei dieser Curven berührt werden.

Die Kegelschnittschaar enthält demnach eine Parabel, wenn nicht alle ihre Curven Parabeln sind; der Kegelschnittbüschel kann zwei Parabeln enthalten.

190. Eine Gerade u, deren Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 sich in einem Punkte U vereinigen (Nr. 61), bildet mit jedem Strahle von U ein Strahlenpaar des Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe, und ist die Polare von U bezüglich aller Curven der Kegelschnittschaar (vgl. Nr. 185). Daraus folgt mit Rücksicht auf Nr. 153:

„Die Curven einer Schaar (oder eines Büschels) von Kegel„schnitten haben im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Pol„dreieck."

Dasselbe ist reell und leicht zu construiren, wenn irgend zwei von den Kegelschnitten vier reelle Punkte oder Tangenten mit einander gemein haben (Seite 81, 82); es hat in jedem Falle mindestens eine reelle Seite u und einen reellen Eckpunkt U. Wenn die Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 sich nicht berühren, so liegt U nicht auf seiner Polare u; und wenn ausserdem das gemeinschaftliche Poldreieck UVW von γ^2 und γ_1^2 imaginär ist, so können die beiden Punkte V und W von u, welche conjugirt sind hinsichtlich beider Kegelschnitte, nicht reell sein. Die Punktenpaare, welche γ^2 und γ_1^2 mit u gemein haben, müssen also in diesem Falle beide reell sein und sich gegenseitig trennen (Seite 146), und jeder der Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 schliesst folglich einen Theil des anderen ein. Daraus und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich leicht:

„Wenn das gemeinschaftliche Poldreieck einer Schaar oder eines „Büschels von Kegelschnitten imaginär ist, so haben die Kegel„schnitte paarweise zwei, und nur zwei reelle Punkte, sowie zwei „reelle Tangenten mit einander gemein. Diese beiden Tangenten „schneiden sich auf der reellen Seite u des Poldreiecks, und „jene beiden Punkte liegen mit dem reellen Eckpunkte U des„selben in einer Geraden";

denn sonst würde der Punkt, in welchem die Verbindungslinie der beiden Punkte von u geschnitten wird, bezüglich beider Kegelschnitte dem Punkte U, sowie einem Punkte der Verbindungslinie conjugirt, und ein zweiter reeller Eckpunkt des gemeinschaftlichen Poldreiecks sein, und das Poldreieck wäre ein reelles.

191. Dreht sich eine Gerade s um einen Punkt P der Geraden u, so beschreiben ihre beiden Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 zwei projectivische Punktreihen, welche den Punkt U entsprechend

gemein haben, und die Verbindungslinie dieser beiden Pole dreht sich folglich um einen Punkt P'; und da die beiden Pole von $\overline{PU}$ in u liegen, so ist auch P' ein Punkt von u. Legen wir nun durch P irgend einen Kegelschnitt k^2, welcher die beiden Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 stützt, so muss derselbe auch durch P' gehen; denn zwei beliebige conjugirte Strahlen von P und P' schneiden denselben in einem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 (Nr. 173 b), und da wenigstens zwei von u verschiedene Seiten dieses Polvierecks durch P gehen, so müssen die ihnen conjugirten Gegenseiten (also auch k^2) durch P' gehen. Da nun u von einem Kegelschnittbüschel, welcher einem beliebigen Polviereck der Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 umschrieben ist, in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird, so ergiebt sich:

Jede reelle Seite u des gemeinschaftlichen Poldreiecks der Kegelschnittschaar schneidet die Curven und Strahlenpaare des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe in den Punktenpaaren P, P' einer involutorischen Punktreihe u. Die Ordnungspunkte dieser Punktreihe bilden ein Punktenpaar der Kegelschnittschaar, weil sie bezüglich aller Curven des Kegelschnitt-Systemes conjugirt sind.

Aus jedem reellen Eckpunkte U des gemeinschaftlichen Poldreiecks des Kegelschnittbüschels gehen an die Curven und Punktenpaare des zugehörigen Kegelschnitt-Gewebes Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels U. Die Ordnungsstrahlen dieses Strahlenbüschels bilden ein Strahlenpaar des Kegelschnittbüschels, weil sie bezüglich aller Curven des Kegelschnitt-Gewebes conjugirt sind.

192. Die Strahlenbüschel P und P' (Nr. 191) sind projectivisch, wenn jedem Strahle des einen der ihm hinsichtlich γ^2 und γ_1^2 conjugirte Strahl des anderen zugewiesen wird; sie erzeugen eine Curve II. Ordnung, welche in P und P' von $\overline{PU}$ und $\overline{P'U}$ berührt wird. Ist das gemeinschaftliche Poldreieck reell, so geht diese Curve durch die Ordnungspunkte der beiden involutorischen Punktreihen v und w, welche in den anderen beiden Seiten des Poldreiecks sich ergeben; und wenn die Ordnungspunkte der Punktreihe u imaginär, also P und P' durch v und w getrennt sind, so hat eine der Punktreihen v und w mit der Curve II. Ordnung zwei reelle, die andere dagegen zwei imaginäre Ordnungspunkte gemein. Die Strahlen eines reellen Ordnungspunktes O von u, v oder w sind involutorisch gepaart, sodass je zwei zugeordnete Strahlen von O in Bezug auf die beiden Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2,

conjugirt sind; und O ist der Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten dieser Kegelschnitte, nämlich der beiden Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels O. — Ist das gemeinschaftliche Poldreieck von γ^2 und γ_1^2 imaginär, so schneiden sich auf seiner reellen Seite u zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten von γ^2 und γ_1^2 in einem Punkte O (Nr. 190), woraus folgt, dass die involutorische Punktreihe u in diesem Falle zwei reelle Ordnungspunkte O besitzt. Aus dem Allen ergiebt sich:

Die Kegelschnittschaar enthält mindestens ein reelles Punktenpaar und im Allgemeinen höchstens drei solche; ihre drei Punktenpaare liegen (auch wenn zwei derselben imaginär sind) auf den drei Seiten des Poldreiecks der Schaar, und bilden die drei Paar Gegenpunkte eines reellen oder imaginären Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar eingeschrieben ist.

Der Kegelschnittbüschel enthält mindestens ein reelles Strahlenpaar und im Allgemeinen höchstens drei solche; seine drei Strahlenpaare schneiden sich (auch wenn zwei derselben imaginär sind) in den drei Eckpunkten des Poldreiecks des Büschels, und bilden die drei Paar Gegenseiten eines reellen oder imaginären Vierecks, welchem der Kegelschnittbüschel umschrieben ist.

193. Ausser verschiedenen Uebergangsarten, deren Curven sich in einem Punkte berühren oder osculiren, unterscheiden wir:

drei Hauptarten der Kegelschnittschaar, jenachdem ihre Curven vier, oder zwei, oder keine reellen Tangenten miteinander gemein haben. Nur die Kegelschnittschaaren der zweiten Hauptart haben ein imaginäres Poldreieck (Nr. 190), und nur diejenigen von der ersten Hauptart enthalten drei reelle Punktenpaare. Zwei Kegelschnitte einer Schaar erster oder dritter Art haben entweder keine oder vier reelle Schnittpunkte; zwei Kegelschnitte einer Schaar zweiter Art haben

drei Hauptarten des Kegelschnittbüschels, jenachdem seine Curven vier, oder zwei, oder keine reellen Punkte mit einander gemein haben. Nur die Kegelschnittbüschel der zweiten Hauptart haben ein imaginäres Poldreieck, und nur diejenigen von der ersten Hauptart enthalten drei reelle Strahlenpaare. Zwei Kegelschnitte eines Büschels erster oder dritter Art haben entweder keine oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten; zwei Kegelschnitte einer Schaar zwei-

allemal zwei reelle Schnittpunkte (Nr. 190).

Wenn alle Curven einer Kegelschnittschaar in Punktenpaare zerfallen, was auf zwei Arten möglich ist, so ist die Schaar eine specielle; desgleichen wenn sie einen zweifachen Punkt enthält. Demgemäss bilden alle Kegelschnitte, welche durch die reellen oder imaginären Ordnungspunkte einer involutorischen Punktreihe gehen, oder aber in Bezug auf welche irgend ein Punkt eine gegebene Polare hat, ein specielles lineares Kegelschnitt-System dritter Stufe; aber auch dann ist ein solches System ein specielles, wenn alle seine Kegelschnitte einen Punkt mit einander gemein haben.

ter Art haben allemal zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten.

Wenn alle Curven eines Kegelschnittbüschels in Strahlenpaare zerfallen, so ist der Büschel ein specieller; ebenso wenn er eine zweifache Gerade enthält. Demgemäss bilden alle Kegelschnitte, welche die reellen oder imaginären Ordnungsstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels berühren, oder in Bezug auf welche irgend eine Gerade einen gegebenen Pol hat, ein specielles lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter Stufe; aber auch dann ist ein solches Gewebe ein specielles, wenn alle seine Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente haben.

194. Alle Kreise der Ebene bilden ein specielles lineares System dritter Stufe; die zugehörige Kegelschnittschaar ist die involutorische Punktreihe, in welcher die unendlich ferne Gerade einen rechtwinkligen Strahlenbüschel schneidet. Confocale Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar von der dritten Hauptart; ihre beiden Brennpunkte sind das einzige reelle Punktenpaar dieser Schaar, und das zugehörige lineare Kegelschnitt-System dritter Stufe besteht aus allen gleichseitigen Hyperbeln, in Bezug auf welche die beiden Brennpunkte conjugirt sind. Alle Kreise, die durch zwei reelle Punkte gehen, bilden einen Kegelschnittbüschel von der zweiten, und alle zu ihnen orthogonalen Kreise bilden einen Büschel von der dritten Hauptart. Ein specielles lineares Gewebe dritter Stufe wird gebildet von allen Kegelschnitten, die einen gegebenen Punkt F zum Brennpunkt haben; die Kegelschnitte des zugehörigen Büschels zerfallen in die Strahlenpaare, welche sich in F rechtwinklig schneiden.

Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe zweiter Stufe.*)

195. Drei Curven II. Classe γ^2, γ_1^2, γ_2^2, die in einer Ebene, aber nicht in einer Kegelschnitt-Schaar liegen, bestimmen ein lineares Kegelschnitt-System zweiter Stufe (ein Kegelschnitt-Netz), auf dessen Curven sie ruhen (Nr. 178, 179).

Drei Curven II. Ordnung, die in einer Ebene, aber nicht in einem Kegelschnittbüschel liegen, bestimmen ein lineares Kegelschnittgewebe zweiter Stufe (eine Schaarschaar), dessen Curven auf ihnen ruhen.

Alle Kegelschnitte dieses Netzes, welche ausser jenen drei Curven II. Classe noch eine beliebig angenommene vierte, z. B. einen zweifachen Punkt stützen, bilden (Nr. 178) einen Kegelschnittbüschel. Daraus folgt (vergl. Nr. 189):

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Büschel von Kegelschnitten des Netzes; durch zwei beliebige Punkte geht im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt des Netzes.

Jede Gerade der Ebene berührt eine Schaar von Kegelschnitten der Schaarschaar; zwei beliebige Gerade berührt im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt der Schaarschaar.

196. Je zwei der drei Curven γ^2, γ_1^2, γ_2^2 bestimmen ein das Netz enthaltendes, lineares Kegelschnitt-System dritter Stufe und zugleich eine Kegelschnittschaar, deren Curven auf allen Curven dieses Systemes, also auch auf allen Curven des Kegelschnitt-Netzes ruhen (Nr. 185). Das Netz stützt demnach die drei durch γ^2, γ_1^2, γ_2^2 bestimmten Kegelschnittschaaren, aber ebenso auch jede vierte Schaar, welche irgend zwei Curven jener drei ersten Schaaren enthält. Alle diese Schaaren liegen in der Schaarschaar, welche durch drei beliebige Curven des Netzes bestimmt ist, denn sie stützen sich auch auf diese drei Curven; auch beweist man ohne Schwierigkeit, dass jede Curve der Schaarschaar unendlich vielen jener Schaaren angehört und folglich auf jeder Curve des Netzes ruht. Daher der wichtige Satz:

Mit einem Kegelschnittnetze ist allemal eine Kegelschnitt-Schaarschaar (und umgekehrt) derartig verbunden, dass jede Curve der Schaarschaar auf jede Curve des Netzes sich stützt. Drei beliebige

*) Vgl. Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte, II. Aufl., Seite 500—535 (Leipzig 1876).

Curven des Netzes oder der Schaarschaar genügen zur Bestimmung beider Kegelschnitt-Mannigfaltigkeiten.

Das Netz und die Schaarschaar, von welchen in den folgenden Sätzen die Rede ist, sind in der eben angegebenen Weise mit einander verbunden, sodass die Schaarschaar auf das Netz sich stützt.

197. Das Kegelschnittnetz enthält unendlich viele Strahlenpaare, welche im Allgemeinen eine Curve dritter Classe Γ^3 einhüllen und sich zu zweien in (gemeinschaftlichen) Polvierecken von γ^2, γ_1^2, γ_2^2 und der zugehörigen Schaarschaar schneiden (Nr. 172). Die Strahlen eines solchen Paares sind conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar, d. h. hinsichtlich aller Curven derselben (Nr. 176), und die Pole des einen Strahles bezüglich dieser Curven liegen demnach sämmtlich auf dem anderen Strahle. Zwei beliebige Polvierecke der Schaarschaar sind allemal einer Curve des Netzes eingeschrieben; denn derjenige Kegelschnitt, welcher dem einen Polviereck umschrieben ist und durch einen Eckpunkt U des anderen geht, muss dem durch U gehenden Kegelschnittbüschel des Netzes angehören und deshalb auch durch die übrigen drei Eckpunkte des zweiten Polvierecks gehen. — Ebenso ergiebt sich:

198. Die Kegelschnitt-Schaarschaar enthält unendlich viele Punktenpaare; dieselben liegen im Allgemeinen auf einer Curve III. Ordnung C^3, und je zwei von ihnen sind Paare von Gegenpunkten eines Polvierseits des zugehörigen Kegelschnittnetzes. Die Punkte eines solchen Paares sind conjugirt hinsichtlich des Netzes, d. h. hinsichtlich aller Curven desselben, und die Polaren des einen Punktes bezüglich dieser Curven gehen alle durch den anderen Punkt. Jedes Punktenpaar der Schaarschaar ist harmonisch getrennt durch jedes Strahlenpaar des Netzes. Zwei beliebige Polvierseite des Netzes sind allemal einer Curve der Schaarschaar umschrieben.

199. Durch drei beliebige Strahlenpaare, die nicht die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks bilden, ist das Kegelschnittnetz nebst der zugehörigen Schaarschaar bestimmt (Nr. 196). Umschreibt man dem Polviereck der Schaarschaar, in welchem zwei jener Strahlenpaare sich schneiden, einen Kegelschnittbüschel, und bringt man die Curven dieses Büschels mit dem dritten Strahlenpaare zum Durchschnitt, so erhält man alle Polvierecke der Schaarschaar, deren Eckpunkte auf diesem dritten Strahlenpaare liegen (Nr. 197), und damit auch alle Strahlenpaare des

Netzes und die von ihnen eingehüllte Curve III. Classe Γ^3. Da nun das dritte Strahlenpaar ein ganz beliebiges des Netzes ist, und da seine Strahlen von dem Kegelschnittbüschel in zwei involutorischen Punktreihen geschnitten werden, so ergiebt sich:

„Jede Tangente der Curve III. Classe Γ^3 wird von den Kegel„schnitten des Netzes in Punktenpaaren einer involutorischen „Punktreihe geschnitten. Die Ordnungspunkte dieser Punktreihe „bilden ein Punktenpaar der Schaarschaar und liegen auf der „Curve C^3“;

denn sie sind conjugirt bezüglich aller Curven des Netzes, indem sie durch drei beliebige derselben harmonisch getrennt sind.

200. Ebenso ist durch drei beliebige Punktenpaare, welche nicht die drei Paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits bilden, die Schaarschaar nebst dem zugehörigen Kegelschnittnetze bestimmt, und man kann aus ihnen alle übrigen Punktenpaare der Schaarschaar und die Curve III. Ordnung C^3, auf welcher sie liegen, ableiten.

„Die Tangentenpaare, welche aus einem beliebigen Punkte P der „Curve III. Ordnung C^3 an die Kegelschnitte der Schaarschaar „gezogen werden können, sind Paare zugeordneter Strahlen eines „involutorischen Strahlenbüschels. Die Ordnungsstrahlen dieses „Büschels bilden ein Strahlenpaar des Netzes und berühren die „Curve Γ^3.“

Aus dem beliebigen Punkte P von C^3 werden auch die Punktenpaare der Schaarschaar durch Strahlenpaare des involutorischen Büschels projicirt.

Von einer beliebigen Tangente der Γ^3 werden die Strahlenpaare des Netzes in Punktenpaaren einer involutorischen Punktreihe geschnitten.

Auf C^3 liegen die Schnittpunkte aller Strahlenpaare des Netzes; dagegen wird Γ^3 von den Verbindungslinien aller Punktenpaare der Schaarschaar eingehüllt (vgl. auch Nr. 205).

201. Die Punkte von C^3 sind paarweise conjugirt hinsichtlich des Netzes, und die Tangenten von Γ^3 sind paarweise conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar (Nr. 197 und 198). Wir setzen nun fest:

Drei Punkte von C^3, deren conjugirte auf einer Geraden liegen, sollen ein „Punktentripel“ von C^3 heissen.

Drei Tangenten von Γ^3, deren conjugirte durch einen Punkt gehen, sollen ein „Tangententripel“ von Γ^3 heissen.

Da zwei Punktenpaare der Schaarschaar allemal von einem durch sie bestimmten Polvierseit des Netzes zwei Paar Gegenpunkte bilden (Nr. 198), so ergiebt sich sofort:

Die drei Punkte jedes Tripels von C^3 bilden mit ihren conjugirten Punkten die drei Paar Gegenpunkte eines Polvierseits des Netzes; jedes Polvierseit des Netzes enthält vier Punktentripel von C^3. Zwei beliebige Punkte von C^3 bestimmen ein Punktentripel dieser Curve III. Ordnung. Je zwei Punkte von C^3, deren Verbindungslinie durch einen gegebenen Punkt P_1 von C^3 geht, bilden mit dem zu P_1 conjugirten Punkte P ein Tripel von C^3.

Die drei Tangenten jedes Tripels von Γ^3 bilden mit ihren conjugirten Tangenten die drei Paar Gegenseiten eines Polviereckes der Schaarschaar; jedes Polviereck der Schaarschaar enthält vier Tangententripel von Γ^3. Zwei beliebige Tangenten von Γ^3 bestimmen ein Tangententripel dieser Curve III. Classe. Je zwei Tangenten von Γ^3, die auf einer gegebenen Tangente t_1 von Γ^3 sich schneiden, bilden mit der zu t_1 conjugirten Tangente ein Tripel von Γ^3.

202. Die beiden, von irgend zwei Tripeln der C^3 gebildeten Dreiecke sind allemal einem Kegelschnitt der Schaarschaar umschrieben (Nr. 198), weil sie in zwei Polvierseiten des Netzes liegen (Nr. 201). Daraus aber folgt (Nr. 43):

Zwei beliebige Punktentripel von C^3 sind allemal einer Curve II. Ordnung eingeschrieben. — Wenn also ein Kegelschnitt einem Tripel von C^3 umschrieben ist und durch zwei beliebige Punkte P, Q dieser Curve geht, so ist er auch dem durch P und Q bestimmten Tripel von C^3 umschrieben.

Zwei beliebige Tangententripel von Γ^3 sind allemal einer Curve II. Classe umschrieben. — Wenn also ein Kegelschnitt einem Tripel von Γ^3 eingeschrieben ist und noch zwei beliebige Tangenten p, q von Γ^3 berührt, so ist er auch dem durch p und q bestimmten Tripel von Γ^3 eingeschrieben.

203. Das zweite Tripel (links) fällt mit dem ersten zusammen, wenn P und Q sich zwei Punkten des ersten Tripels von C^3 unbegrenzt nähern, und es ergiebt sich daraus:

Jedem Punktentripel von C^3 kann ein Kegelschnitt umschrieben werden, welcher die Curve C^3 in den drei Punkten des Tripels berührt.

Jedem Tangententripel von Γ^3 kann ein Kegelschnitt eingeschrieben werden, welcher in den Berührungspunkten der drei Tangenten die Curve Γ^3 berührt.

Hiezu erhalten wir aus den letzten Sätzen von Nr. 201 die Zusätze:

In dem Punkte Q von C^3, welcher mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 ein Tripel von C^3 bildet, schneiden sich die Tangenten von P und P_1.

Auf der Tangente von Γ^3, welche mit zwei conjugirten Tangenten t, t_1 ein Tripel von Γ^3 bildet, liegen die Berührungspunkte von t und t_1.

204. Mit Rücksicht auf die Schlusssätze von Nr. 201 folgt aus Nr. 202:

Die Punktenpaare von C^3, deren Verbindungslinien durch einen gegebenen Punkt P_1 von C^3 gehen, liegen auf je einem Kegelschnitt desjenigen Büschels, welcher einem beliebigen Tripel von C^3 umschrieben ist und durch den zu P_1 conjugirten Punkt P geht.

Die Tangentenpaare von Γ^3, welche sich auf einer gegebenen Tangente t_1 von Γ^3 schneiden, berühren je einen Kegelschnitt der Schaar, welche einem beliebigen Tangententripel von Γ^3 eingeschrieben ist und die zu t_1 conjugirte Tangente t berührt.

Der Strahlenbüschel P_1 und der Kegelschnittbüschel links sind durch die Punktenpaare von C^3, und die Punktreihe t_1 und die Kegelschnittschaar rechts sind durch die Tangentenpaare von Γ^3 projectivisch so auf einander bezogen, dass sie die Curve C^3 resp. Γ^3 erzeugen. Zum Beweise dieser beiläufigen Bemerkung ist aber hier nicht der Ort.

205. Die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiecks von irgend zwei Kegelschnitten k^2, k_1^2 des Netzes gehören einem durch sie bestimmten Polvierseit eines beliebigen dritten Kegelschnittes k_2^2 des Netzes an (Nr. 168). Dasselbe ist ein gemeinschaftliches Polvierseit von k^2, k_1^2 und k_2^2 und folglich ein Polvierseit des Netzes. Daraus folgt (vgl. Nr. 201):

Das gemeinschaftliche Poldreieck von zwei beliebigen Kegelschnitten des Netzes ist allemal ein Punktentripel von C^3. Insbesondere schneiden sich die drei Paar Gegenseiten eines jeden Polvierecks der Schaarschaar in einem Punktentripel von C^3.

Das gemeinschaftliche Poldreiseit von zwei beliebigen Kegelschnitten der Schaarschaar ist allemal ein Tangententripel von Γ^3. Insbesondere liegen die drei Paar Gegenpunkte eines jeden Polvierseits des Netzes auf einem Tangententripel von Γ^3.

Die erste Hälfte dieser Sätze ist umkehrbar. Auch beweist man leicht, dass jeder Punkt, dessen Polaren in Bezug auf zwei Curven des Netzes zusammenfallen, auf C^3 liegt, und dass jede Gerade,

deren Pole in Bezug auf zwei Curven der Schaarschaar zusammenfallen, die Curve Γ^3 berührt.

206. Alle Geraden, welche drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte in einer Involution von Punkten schneiden, umhüllen eine Curve III. Classe Γ^3 (Nr. 199); dieselbe berührt auch die sechs gemeinschaftlichen Secanten von je zwei der drei Kegelschnitte (Nr. 197).

Alle Punkte, aus welchen an drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte eine Involution von Tangenten gehen, liegen in einer Curve III. Ordnung C^3 (Nr. 200); dieselbe geht auch durch die sechs Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von je zwei der drei Kegelschnitte (Nr. 198).

207. Da zwei conjugirte Punkte Q, Q_1 der Curve C^3 durch je zwei conjugirte Tangenten der Curve Γ^3 harmonisch getrennt sind (Nr. 198), und da dem Punkte Q_1 von C^3, welcher mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 in einer Geraden liegt, der Schnittpunkt Q der Tangenten von P und P_1 conjugirt ist (Nr. 203 und 201), so ergiebt sich:

Jede Tangente von C^3 bildet mit den drei Tangenten, die von ihrem Berührungspunkte P an Γ^3 gezogen werden können, einen harmonischen Strahlenbüschel;

Jeder Punkt von Γ^3 bildet mit den drei Punkten, in welchen seine Tangente die Curve C^3 schneidet, eine harmonische Punktreihe.

und zwar ist die Tangente von C^3 durch zwei conjugirte Tangenten der Curve Γ^3 harmonisch getrennt von $\overline{PP_1}$. Wenn P_1 ein Wendepunkt von C^3 ist, so fällt Q mit P_1 zusammen und $\overline{PP_1}$ berührt in P die C^3; und umgekehrt. Wegen des Satzes rechts aber fällt alsdann der Punkt, in welchem Γ^3 von der Tangente $\overline{PP_1}$ berührt wird, mit P zusammen. Daher der Satz:

„Die Curven C^3 und Γ^3 berühren sich in allen ihren gemeinschaftlichen Punkten; die Tangente jedes gemeinschaftlichen Punktes P schneidet die C^3 in einem ihrer Wendepunkte P_1, und wird in P von einer Rückkehrtangente der Curve Γ^3 geschnitten."

208. In der Schaarschaar ist eine Schaar von Parabeln enthalten (Nr. 195); und zwar liegen deren Brennpunkte auf einem Kreise, und ihre Leitlinien schneiden sich in einem Punkte K (vergl. Nr. 123). Das Netz enthält im Allgemeinen einen Kreis (sein Mittelpunkt ist K), einen Büschel gleichseitiger Hyperbeln und unendlich viele Parabeln, von welchen durch einen beliebigen Punkt höchstens zwei gehen (Nr. 195 und 189).

209. Die Schaarschaar ist eine specielle, wenn sie einen zweifachen Punkt Z enthält; derselbe ist ein Doppelpunkt von C^3, durch ihn gehen alle Kegelschnitte des zugehörigen Netzes, welches ebenfalls ein specielles ist, und die Curve Γ^3 zerfällt in den Strahlenbüschel Z und diejenige Curve Γ^2 II. Classe, deren Tangenten den Strahlen von Z in Bezug auf zwei beliebige Curven der Schaarschaar conjugirt sind. Der Strahlenbüschel Z und der Tangentenbüschel von Γ^2 sind projectivisch und erzeugen mit einander die Curve C^3 (Nr. 200). — Die Schaarschaar und das Netz sind ferner speciell, wenn das Netz eine zweifache Gerade z enthält; dieselbe ist eine Doppeltangente von Γ^3 und berührt alle Kegelschnitte der Schaarschaar, und in sie und eine Curve II. Ordnung zerfällt die Curve C^3.

210. Noch specieller ist die Schaarschaar, wenn sie alle Punktenpaare einer involutorischen Punktreihe u enthält. Die Kegelschnitte des Netzes gehen dann sämmtlich durch die beiden Ordnungspunkte von u, die Curve Γ^3 zerfällt in diese beiden Ordnungspunkte und den Pol U von u bezüglich einer beliebigen Curve γ^2 der Schaarschaar, und C^3 zerfällt in die Gerade u und eine Curve II. Ordnung (vergl. Nr. 117). Die Gerade u ist hinsichtlich der Schaarschaar allen Strahlen des Büschels U conjugirt, und durch U geht eine gemeinschaftliche Secante von je zwei Kegelschnitten des Netzes. Ist insbesondere die involutorische Punktreihe u der Schnitt eines rechtwinkligen Strahlenbüschels mit der unendlich fernen Geraden, so besteht das Netz aus lauter Kreisen (vergl. Nr. 194), und es ergiebt sich:

211. Alle Kreise, welche eine gegebene Curve II. Classe γ^2 stützen, d. h. ihren Poldreiecken und Polvierecken umschrieben werden können, bilden ein specielles Kegelschnittnetz. Die Secanten, welche sie paarweise mit einander gemein haben, schneiden sich im Mittelpunkt U von γ^2, oder sind parallel, wenn γ^2 eine Parabel ist. Ist γ^2 eine Ellipse oder Hyperbel, so sind demnach die Producte aus den Abschnitten der Secanten, welche vom Mittelpunkte U an die Kreise gezogen werden können, constant, die Kreise haben gleiche „Potenz“ in U, und es giebt einen mit γ^2 concentrischen Kreis, welcher alle Kreise des Netzes rechtwinklig schneidet (jedoch bei stumpfwinkligen Hyperbeln imaginär wird). Ist dagegen γ^2 eine Parabel, so liegen die Mittelpunkte aller Kreise des Netzes auf einer Geraden. Jeder Punkt dieser Geraden oder jenes orthogonalen, mit γ^2 concentrischen Kreises kann

als ein verschwindend kleiner Kreis des Netzes aufgefasst werden, und wir schliessen daraus, dass von ihm aus zwei zu einander rechtwinklige Tangenten an γ^2 gezogen werden können. Die Sätze dieser Nummer hat Herr Faure entdeckt.

212. Aus den zu Nr. 210 reciproken Sätzen ergiebt sich u. A. Folgendes: Alle Kegelschnitte, welche einen Punkt F zum Brennpunkt haben und auf eine Curve II. Ordnung k^2 sich stützen, bilden eine specielle Schaarschaar. Die zwei reellen Tangenten, welche irgend zwei von ihnen mit einander gemein haben, schneiden sich allemal auf der Polare f von F in Bezug auf k^2. Die Curve Γ^3 zerfällt in F und eine Curve II. Classe; C^3 dagegen zerfällt in f und die beiden imaginären Ordnungsstrahlen des rechtwinkligen Büschels F. Von jedem Polviereck der Schaarschaar schneiden sich zwei Gegenseiten rechtwinklig in F; die Schnittpunkte der übrigen zwei Paar Gegenseiten liegen auf f. Ueberhaupt ist f die Polare von F in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes, auf welchem die Schaarschaar ruht.

213. Ein sehr specielles Netz bilden alle Kegelschnitte, die einem Dreieck ABC umschrieben werden können; von den Curven der zugehörigen Schaarschaar ist ABC ein gemeinschaftliches Poldreieck; die Curven C^3 und Γ^3 reduciren sich auf die drei Seiten resp. die drei Eckpunkte des Dreiecks. — Die Kegelschnitte, von welchen ABC ein Poldreieck ist, bilden nicht allein eine sehr specielle Schaarschaar, sondern zugleich ein ebenso specielles Netz; auf das letztere stützt sich die Schaarschaar, welche dem Dreieck eingeschrieben werden kann.

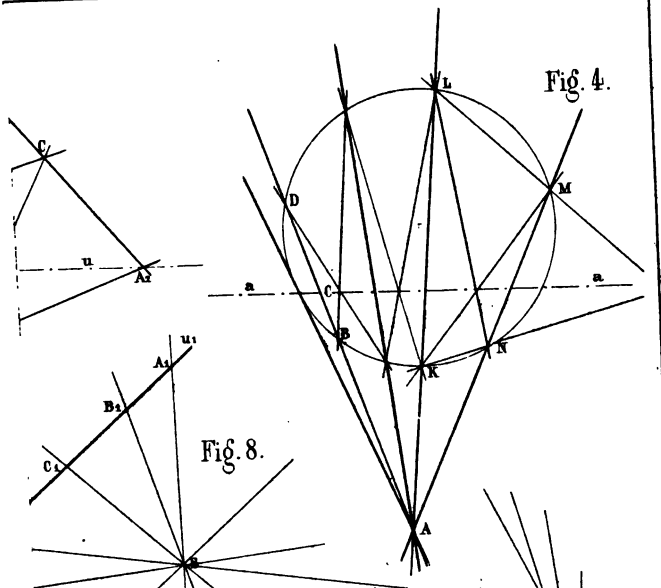


Fig. 4.

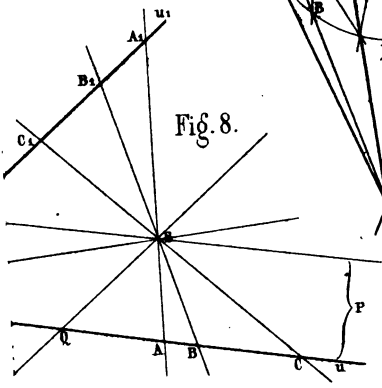


Fig. 8.

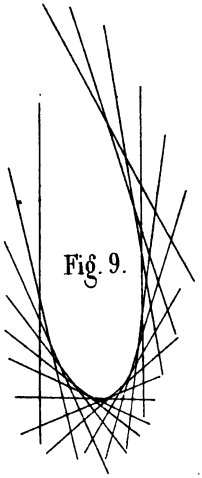
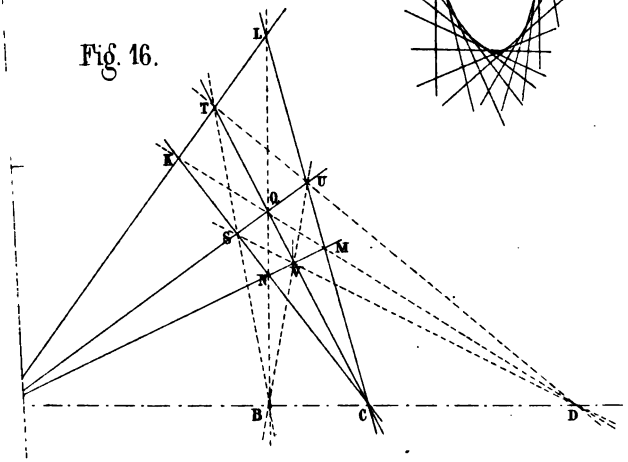


Fig. 9.

Fig. 16.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.

Fig. 20.

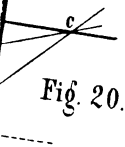


Fig. 21.

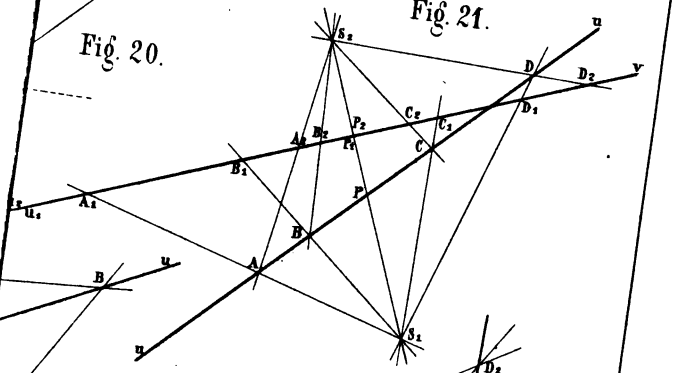


Fig. 26.

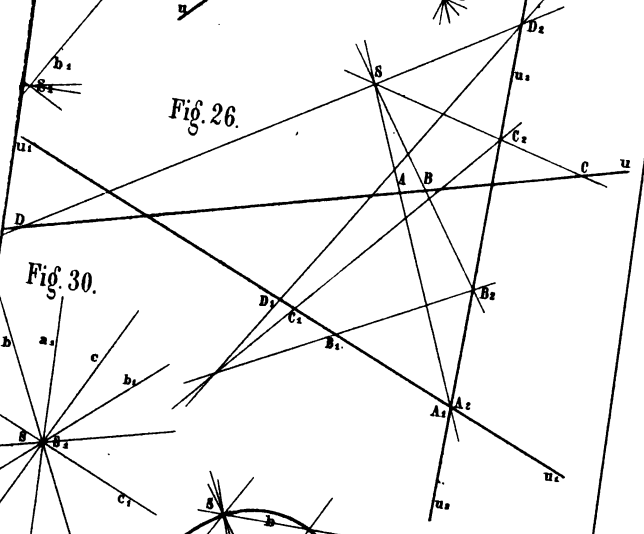


Fig. 30.

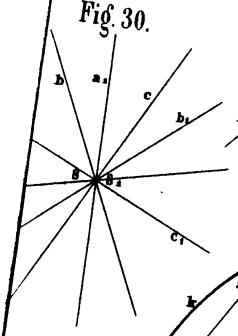
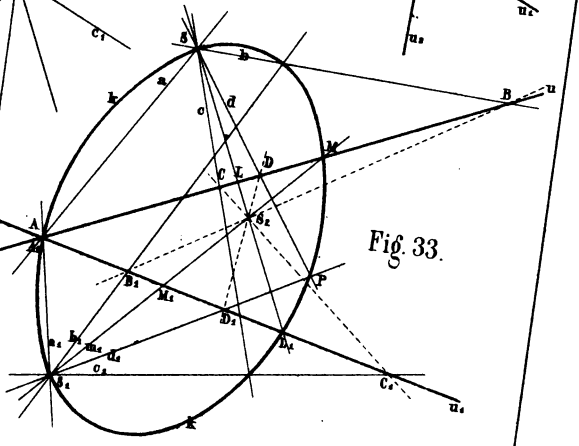


Fig. 33.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.

Fig. 37.

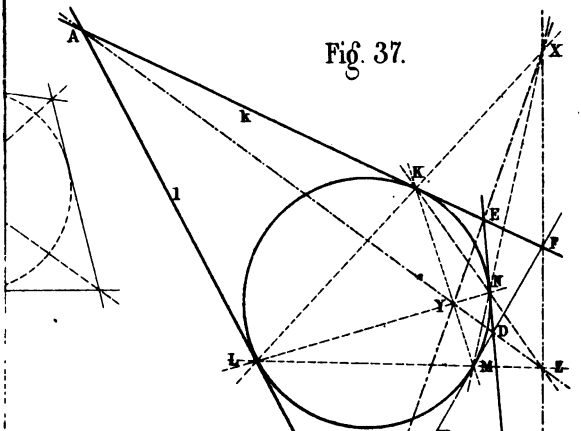


Fig. 39.

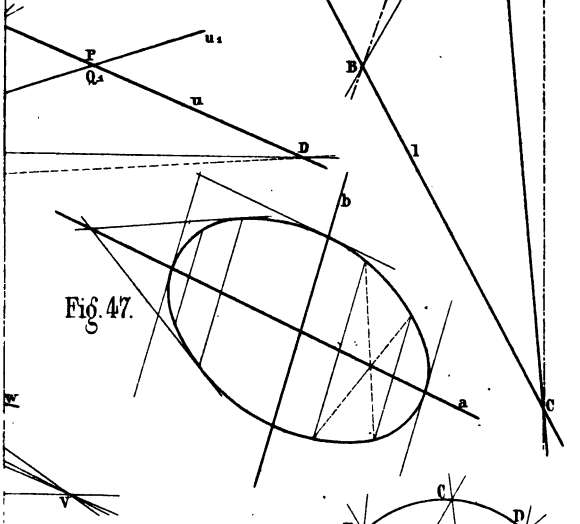
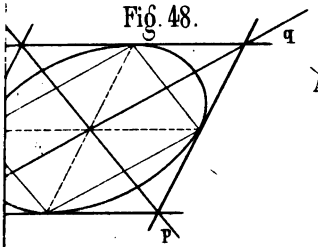


Fig. 47.

Fig. 48.



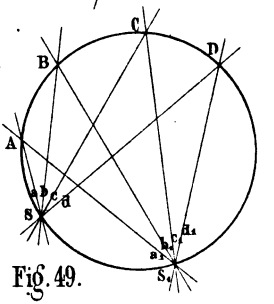


Fig. 49.

ESCHEBACH & SCHAEFER LEIPZIG

§. 53.

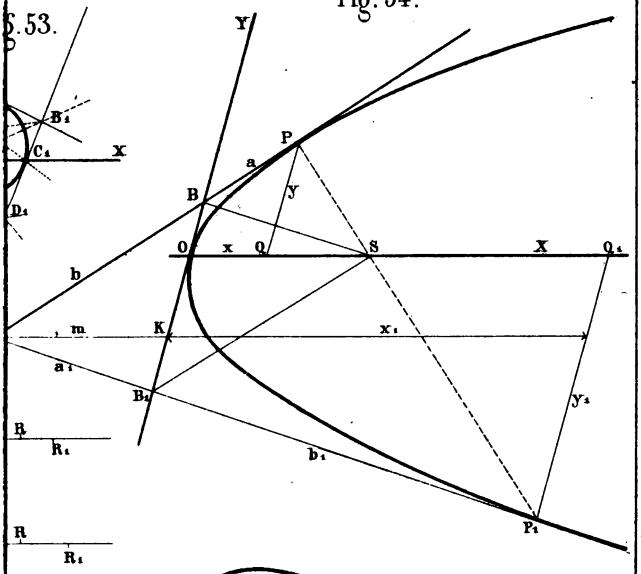


Fig. 54.

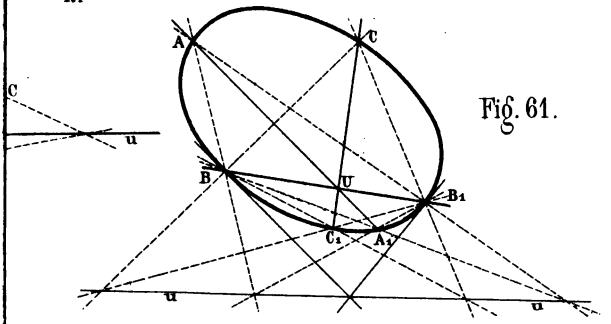
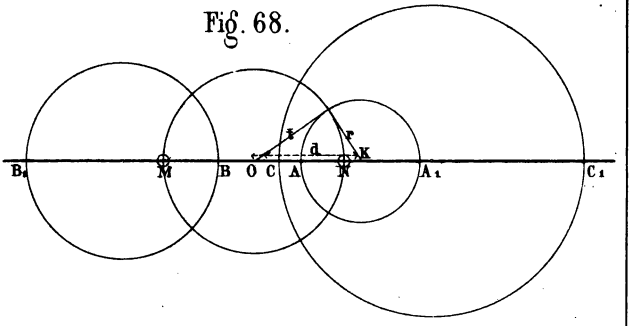


Fig. 61.

Fig. 68.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.

Fig. 72.

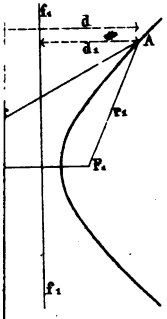


Fig. 73.

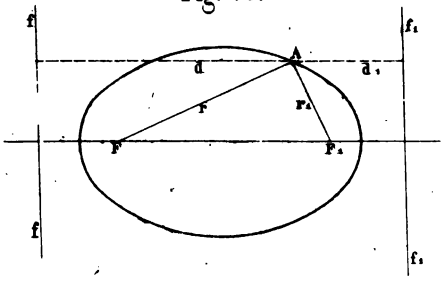


Fig. 81.

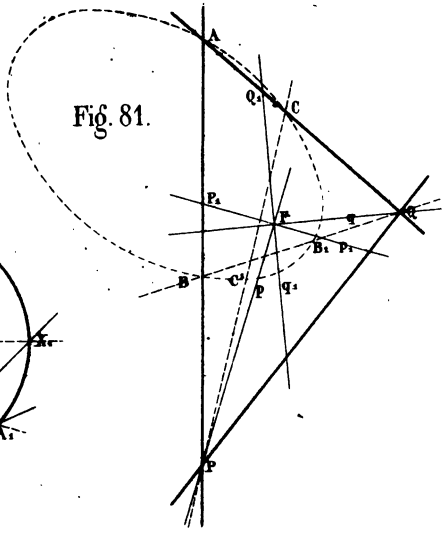
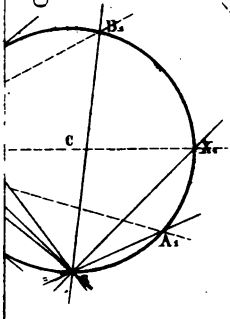


Fig. 80.



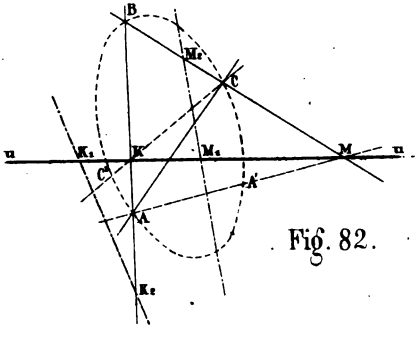


Fig. 82.

ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.